TD 02 : Théorème de Brouwer et applications

1. **QUELQUES APPLICATIONS DU THÉORÈME DE NON-RÉTRACTION ET DU THÉORÈME DE BROUWER**

   Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathbb{S}_n$ la sphère de dimension n, et B_n la boule unité fermée centrée en 0 dans $\mathbb{R}^n$.

   (a) Montrer que l'identité $id : \mathbb{S}_n \to \mathbb{S}_n$ n'est pas homotope à une constante.

   (b) Montrer que l'inclusion $i : \mathbb{S}_n \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ n'est pas homotope à une constante.

   (c) Soit $V \in \mathcal{C}(B_{n+1}, \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$ un champ de vecteurs sur B_{n+1} qui ne s'annule nulle part. Montrer qu'il existe des points p, q de $\mathbb{S}_n$ et des réelles strictement positifs α, β tels que $V(p) = \alpha p$ et $V(q) = -\beta q$.

   (d) Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{S}_n, \mathbb{S}_n)$. Montrer que si f n'est pas surjective, alors il existe $g \in \mathcal{C}(B_n, \mathbb{S}_n)$ telle que $g_{|\mathbb{S}_n} = f$.

2. **CROISEMENT DE COURBES**

   Nous allons démontrer ici qu'une partie du jeu de Hex a toujours au plus un vainqueur. On admettra ici la version suivante du théorème de Poincaré-Miranda :

   Théorème 1 (Théorème de Poincaré-Miranda)**.**
   Soit $n \geq 1$. Soit $F = (F_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathcal{C}([0,1]^n, \mathbb{R}^n)$ un champ de vecteurs sur $[0,1]^n$. Supposons que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

   $$\begin{cases} F_k \leq 0 & \text{sur} \quad [0,1]^{k-1} \times \{0\} \times [0,1]^{n-k} \\ F_k \geq 0 & \text{sur} \quad [0,1]^{k-1} \times \{1\} \times [0,1]^{n-k} \end{cases}.$$

   Alors il existe $x \in [0,1]^n$ tel que $F(x) = 0$.

   Soient $[a,b]$ et $[c,d]$ deux segments, et $\mathcal{R} := [a,b] \times [c,d]$. Soient h et v dans $\mathcal{C}([0,1], \mathcal{R})$, telles que :

   $$h(0) \in \{a\} \times [c,d], \qquad \begin{array}{lcl} v(1) & \in & [a,b] \times \{d\}, \\ & & \\ v(0) & \in & [a,b] \times \{c\}. \end{array} \qquad h(1) \in \{b\} \times [c,d],$$

   Montrer que les images de v et de h ont un point d'intersection.

3. **GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE BROUWER**

   Soit $n \geq 0$, et soit C une partie convexe, compacte et non vide de $\mathbb{R}^n$. On se propose de montrer que toute fonction continue de C dans lui-même a un point fixe.

   (a) ontrer que pour tout point $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique point $\pi(x) \in C$ tel que $d(x, \pi(x)) = d(x, C)$.

   (b) Montrer que, pour tous x et y dans $\mathbb{R}^n$,

   $$\langle x - \pi(x), \pi(y) - \pi(x) \rangle \leq 0.$$

   (c) En déduire que la fonction $\pi : \mathbb{R}^n \to C$ est 1-lipschitzienne, et donc continue.

   (d) En déduire la généralisation annoncée du théorème de Brouwer.

4. **ACTION D'APPLICATIONS QUI COMMUTENT**

   Soit $n \geq 0$, et soit C un compact convexe de $\mathbb{R}^n$. Soit $(f_k)_{k \geq 0}$ une suite de fonctions affines de C dans C qui commutent deux à deux. Montrer qu'il existe un point fixe commun à toutes les fonctions f_k.

5. **THÉORÈME DU POINT FIXE DE SCHAUDER**

   On cherche une version du théorème de Brouwer qui soit valide dans des espaces de dimension infinie.

   (a) Trouver une application continue de la boule unité fermée de $\ell^2(\mathbb{N})$ dans elle-même sans point fixe.

   Le théorème de non-rétraction et cette version naïve de théorème de Brouwer sont donc faux. On rajoute une hypothèse de compacité. Soit E un espace de Banach, soit C un convexe fermé non vide de E, et soit f une fonction continue de C dans lui-même et telle que $\overline{f(C)}$ soit relativement compact. On veut montrer que f a un point fixe (théorème du point fixe de Schauder).

   (b) Soit $\varepsilon > 0$. Justifier le fait qu'il existe une partie finie S_ε de C telle que $\overline{f(C)} \subset \bigcup_{y \in S_\varepsilon} B(y, \varepsilon)$.

   (c) On pose :

   $$\begin{aligned} C_\varepsilon &= \left\{ \sum_{y \in S_\varepsilon} t(y) y \ : \ t \in [0,1]^{S_\varepsilon}, \ \sum_{y \in S_\varepsilon} t(y) = 1 \right\}, \\ t(x,y) &= \frac{\max\{\varepsilon - \|f(x) - y\|_E, 0\}}{\sum_{y \in S_\varepsilon} \max\{\varepsilon - \|f(x) - y\|_E, 0\}} \ \forall (x,y) \in C_\varepsilon \times S_\varepsilon, \\ f_\varepsilon(x) &= \sum_{y \in S_\varepsilon} t(x,y) y \ \ \forall x \in C_\varepsilon. \end{aligned}$$

   Montrer que $\|f_{|C_\varepsilon} - f_\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon$.

(d) Appliquer le théorème de Brouwer à f_ε.

Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, soit x_n un point fixe de $f_{1/n}$.

(e) Montrer que $(f(x_n))_{n\geq 1}$ a une sous-suite convergente $(f(x_{n_k}))_{k\geq 0}$. Montrer que $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ converge.
(f) En déduire le théorème du point fixe de Schauder.

6. **THÉORÈME DE PERRON-FROBENIUS**

Soit $n \geq 1$, et soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice à coefficients positifs ou nuls. On suppose qu'aucune colonne de A n'est nulle. On pose $\Delta := \{x \in [0,1]^n : \sum_i x_i = 1\}$.

(a) Faire agir A sur Δ de façon naturelle [1].
(b) En déduire que A a une valeur propre strictement positive λ, dont un vecteur propre associé x_λ est à coordonnées positives ou nulles.
(c) x_λ est-il nécessairement à coordonnées strictement positives ?

On renforce les hypothèses sur A : maintenant, on suppose que A est *irréductible*, c'est-à-dire que pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, il existe $m \geq 1$ tel que $(A^m)_{ij} > 0$ [2].

(d) Vérifier que x_λ est à coordonnées strictement positives, et que λ est égal au rayon spectral de A (indication : si μ est une valeur propre de module maximal et y_μ un vecteur propre associé, considérer $x_\lambda + \varepsilon(e^{i\psi}y_\mu + e^{-i\psi}\overline{y_\mu})$, et bien choisir ε et ψ).
(e) λ est-elle nécessairement l'unique valeur propre de module maximal ?

Finalement, on suppose que A est *apériodique*, c'est-à-dire qu'il existe $m \geq 1$ tel que A^m soit à coefficients strictement positifs [3].

(f) Montrer que λ est une valeur propre géométriquement simple [4].

---

1. L'ensemble E des matrices à coefficients positifs ou nuls et sans colonne nulle, muni de la composition, forme un monoïde. Une action de ce monoïde est un morphisme de monoïdes $\varphi : (E, \circ) \to (\mathcal{C}(\Delta, \Delta), \circ)$. L'action de A sur Δ est alors $\varphi(A) \in \mathcal{C}(\Delta, \Delta)$.
2. Cela est équivalent à la connexité d'un graphe orienté si A en est la matrice d'ajacence, ou à l'ergodicité d'une chaîne de Markov si A en est la matrice de transition.
3. Cela est équivalent à la propriété de mélange d'une chaîne de Markov si A en est la matrice de transition.
4. En fait, l'hypothèse d'irréductibilité suffit à démontrer que λ est algébriquement simple. L'apériodicité apporte en plus le fait que λ est l'unique valeur propre de module maximal.