

TD 01 : Homéomorphismes et difféomorphismes

1. QUELQUES ESPACES TOPOLOGIQUES HOMÉOMORPHES (OU NON)

Les paires d'espaces suivants sont-ils homéomorphes ? Si oui, expliciter un homéomorphisme ; sinon, démontrer qu'ils ne le sont pas.

- Le carré $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} \leq 1\}$ et le disque unité fermé de \mathbb{R}^2 .
- La boule unité ouverte dans \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^n , où $n \geq 1$.
- Le cercle unité $\mathbb{S}_1 \subset \mathbb{R}^2$ et la droite réelle \mathbb{R} .
- \mathbb{R} et \mathbb{R}_+^* .
- \mathbb{R} et \mathbb{R}_+ .
- le plan complexe épointé \mathbb{C}^* et le cylindre $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{R}$.
- $(0, 1)$ et $(0, 1) \cup (2, 3)$.
- \mathbb{R}^2 et \mathbb{R} (indice : combien de composantes connexes ont ces ensembles si on leur retire un point ?).

2. CONNEXITÉ

Soit X un espace topologique. On rappelle qu'une partie A de X est *connexe* si toute partition de A en deux ensembles ouverts est triviale. Une *composante connexe* de X est une partie connexe maximale pour l'inclusion.

- Quelles sont les composantes connexes de \mathbb{Q} pour la topologie induite par celle de \mathbb{R} ?
- Montrer que pour tout $x \in X$, il existe une unique composante connexe de X qui contient x , et qui est :

$$\text{Conn}(x) := \bigcup_{\substack{A \subset X \\ x \in A, A \text{ connexe}}} A.$$

- En déduire que l'ensemble des composantes connexes de X forme une partition de X .
- Montrer que l'image d'un ensemble connexe par une application continue est connexe.
- Montrer que l'image d'une composante connexe par un homéomorphisme est une composante connexe. En déduire que si deux espaces topologiques sont homéomorphes, alors les ensembles de leurs composantes connexes ont le même cardinal.

 3. CALCUL DIFFÉRENTIEL DANS $M_n(\mathbb{R})$

Soit $n \geq 1$. On munit \mathbb{R}^n d'une norme quelconque, et $E := M_n(\mathbb{R})$ de la norme d'opérateurs :

$$\|A\| := \sup_{v \in \mathbb{R}^n : \|v\| \leq 1} \|Av\|.$$

On rappelle que cette norme fait de E une algèbre de Banach : $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ pour tous A et B dans E . On note de plus $U := GL_n(\mathbb{R})$.

- Calculer la différentielle de l'application :

$$f_1 : \begin{cases} E \times E & \rightarrow E \\ (A, B) & \mapsto AB \end{cases}.$$

- En déduire la différentielle de l'application :

$$f_2 : \begin{cases} E & \rightarrow E \\ A & \mapsto A^2 \end{cases}.$$

On s'intéresse maintenant à l'application inverse :

$$f : \begin{cases} U & \rightarrow U \\ A & \mapsto A^{-1} \end{cases}.$$

- Montrer que U est un ouvert dense de E et que f est analytique sur U .
- Montrer que, pour toute matrice $M \in E$ telle que $\|M\| < 1$, la matrice $(I - M)$ est inversible et :

$$(I - M)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} M^k.$$

- En déduire la différentielle de f .

Pour finir, on s'intéresse à l'application $\det : E \rightarrow \mathbb{R}$.

- (f) Montrer que \det est analytique sur E .
- (g) Calculer $D_I \det$ (on pourra calculer les dérivées partielles de \det dans une base bien choisie).
- (h) En déduire la différentielle de \det sur U , puis sur E .

4. HOMÉOMORPHISMES ET DIFFÉOMORPHISMES DE CÔNES

Le but de cet exercice est de déterminer les classes d'équivalence de cônes de \mathbb{R}^2 sous l'action des homéomorphismes et des difféomorphismes.

Pour tout $\alpha \in (0, 2\pi)$, on note :

$$K_\alpha := \left\{ \begin{pmatrix} r \cos(\theta) \\ r \sin \theta \end{pmatrix} : (r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0, \alpha] \right\}.$$

- (a) Soient α et α' dans $(0, 2\pi)$. En travaillant en coordonnées polaires, montrer que K_α et $K_{\alpha'}$ sont homéomorphes.
- (b) Soit $\alpha \in (0, \pi)$. En travaillant en coordonnées cartésiennes, montrer que K_α et $K_{\frac{\pi}{2}}$ sont \mathcal{C}^∞ -difféomorphes.
- (c) De même, montrer que K_α et $K_{\frac{3\pi}{2}}$ sont \mathcal{C}^∞ -difféomorphes pour tout $\alpha \in (\pi, 2\pi)$.
- (d) Soient $\alpha \in (0, 2\pi)$ et $\gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow K_\alpha$ une application de classe \mathcal{C}^1 telle que $\gamma(0) = 0$. Montrer que $\gamma'(0) \in K_\alpha$.
- (e) Soient $\alpha \in [\pi, 2\pi)$ et $\alpha' \in (0, \pi)$. Supposons qu'il existe un difféomorphisme $\varphi : K_\alpha \rightarrow K_{\alpha'}$. Trouver une courbe $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow K_\alpha$ telle que $\varphi \circ \gamma(0) = 0$ et $(\varphi \circ \gamma)'(0) \neq 0$. Que peut-on en conclure ?
- (f) Soit $\alpha \in (\pi, 2\pi)$. Montrer que K_α et K_π ne sont pas difféomorphes.

On définit deux relations \sim_h et \sim_d sur $(0, 2\pi)$ par $\alpha \sim_h \alpha'$ (resp. $\alpha \sim_d \alpha'$) si et seulement si il existe un homéomorphisme (resp. un difféomorphisme) de K_α dans $K_{\alpha'}$.

- (g) Montrer que \sim_h et \sim_d sont des relations d'équivalence. Quelles sont les classes d'équivalence de $(0, 2\pi)$ pour ces deux relations ?

5. ENSEMBLES DE NIVEAU

On pose :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto x^2 + y^2 - z^2 \end{cases}.$$

- (a) En quels points f est-elle une submersion ?
- (b) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $H_f(t) := f^{-1}(\{t\}) \subset \mathbb{R}^3$. Montrer que $\{H_f(t) : t \in \mathbb{R}\}$ forme une partition de \mathbb{R}^3 .
- (c) Quelles sont les valeurs critiques et régulières de f ?
- (d) Dessiner $H_f(-1)$ et $H_f(1)$. Que se passe-t-il pour les valeurs critiques ?

On pose maintenant :

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2 + z^2 \end{cases}.$$

- (e) Déterminer les points en lesquels ou bien g n'est pas dérivable, ou bien Dg s'annule.
- (f) Dessiner $H_g(1/4)$ (indice : regarder d'abord ce qu'il se passe dans $\mathbb{R}_+ \times \{0\} \times \mathbb{R}$, puis utiliser le fait que $H_g(1/4)$ est une surface de révolution).

6. PARAMÉTRISATION DE SPHÈRES

Le but de cet exercice est de paramétrer les sphères de dimension 1, 2 et 3. On commence par la dimension 1, en posant :

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto (\cos(x), \sin(x)) \end{cases}.$$

- (a) Vérifier que l'image de f_1 est le cercle unité \mathbb{S}_1 .
- (b) Montrer que f_1 est une immersion.
- (c) Montrer que $f_1|_{(-\pi, \pi)}$ est une bijection sur son image, que l'on explicitera.

Maintenant, on étudie la dimension 2 et aux coordonnées sphériques. On pose :

$$f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto (\cos(x) \cos(y), \sin(x) \cos(y), \sin(y)) \end{cases}.$$

- (d) Vérifier que l'image de f_2 est la sphère unité \mathbb{S}_2 .
- (e) Déterminer le rang de $D_{(x,y)} f_2$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. En quels points f_2 est-elle une immersion ?

(f) Quelle est l'image de $f_2|_{(-\pi,\pi)\times(-\pi/2,\pi/2)}$?

Pour tout $n \geq 1$, il existe des coordonnées sphériques généralisées qui paramètrent la sphère unité de dimension n . Il peut d'ailleurs être instructif de trouver la formule correspondante. Cependant, il existe une autre paramétrisation intéressante en dimension 3, la paramétrisation de Hopf. On pose :

$$f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z) & \mapsto (\cos(x)\cos(z), \sin(x)\cos(z), \cos(y)\sin(z), \sin(y)\sin(z)) \end{cases} .$$

(g) Vérifier que l'image de f_3 est la sphère unité \mathbb{S}_3 .

(h) En quels points f_3 est-elle une immersion ?

7. PROJECTIONS STÉRÉOGRAPHIQUES

On note \mathbb{S}_1 le cercle de rayon 1 et de centre 0 inclus dans \mathbb{R}^2 . Pour tout $P \in \mathbb{S}_1$, on définit une application $\varphi_P : \mathbb{S}_1 \setminus \{P\} \rightarrow \mathbb{R}$ de la façon suivante. Soit D_P la copie de la droite réelle tangente à \mathbb{S}_1 en $-P$ et orientée dans le sens trigonométrique. Pour tout $Q \in \mathbb{S}_1 \setminus \{P\}$, on désigne par $\varphi_P(Q)$ le point d'intersection de D_P et de la droite (PQ) .

(a) Faire un dessin pour $P = (0, 1)$.

(b) Montrer que l'application $\varphi_{(0,1)} \circ \varphi_{(0,-1)}^{-1} : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ est bien définie. L'expliciter. Montrer qu'il s'agit d'un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme.

(c) On utilise la paramétrisation usuelle du cercle, que l'on note $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}_1$. Expliciter $\varphi_{(-1,0)} \circ f$. Sur quel ensemble cette application est-elle bien définie ?

On cherche à généraliser cette construction en dimension supérieure. Soit $n \geq 2$. On note \mathbb{S}_{n-1} la sphère unité dans \mathbb{R}^n . Soient $N := (0, \dots, 0, 1)$ et $S := (0, \dots, 0, -1)$ les pôles Nord et Sud de la sphère respectivement.

On plonge \mathbb{R}^{n-1} dans \mathbb{R}^n par $(x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, -1)$. Soit $\varphi_N : \mathbb{S}_{n-1} \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ l'application telle que $\varphi_N(P)$ soit le point d'intersection de l'hyperplan \mathbb{R}^{n-1} et de la droite (PQ) pour tout $P \in \mathbb{S}_{n-1} \setminus \{N\}$.

On plonge \mathbb{R}^{n-1} dans \mathbb{R}^n par $(x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, 1)$, et on définit de façon similaire une application $\varphi_S : \mathbb{S}_{n-1} \setminus \{S\} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$.

(d) Faire un dessin pour $n = 3$.

(e) Expliciter l'application $\varphi_S \circ \varphi_N^{-1} : \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$.

On fixe $n = 3$. On paramètre partiellement la sphère par les coordonnées sphériques de l'exercice précédent, et l'on note $f : (-\pi, \pi) \times (-\pi/2, \pi/2)$ cette paramétrisation.

(f) Expliciter $\varphi_N \circ f$. Quelle est son image ?

(g) Montrer que $\varphi_N \circ f$ est un difféomorphisme sur son image.

8. LEMME DE MORSE

Soient $1 \leq p \leq n$ des entiers. Soit U un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^n . Soit $f \in \mathcal{C}^3(U, \mathbb{R})$ une fonction telle que $f(0) = 0$ et $D_0f = 0$. On suppose que D_0^2f est non dégénérée et de signature $(p, n - p)$. On veut montrer qu'il existe des voisinages $V \subset U$ et W de 0 dans \mathbb{R}^n et un difféomorphisme $\varphi : V \rightarrow W$ tels que, si l'on note $u := \varphi(x)$, alors :

$$f(x) = \sum_{k=1}^p u_k^2 - \sum_{k=p+1}^n u_k^2.$$

On note $S_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices symétriques, et $A_n(\mathbb{R})$ celui des matrices anti-symétriques.

(a) Soit $S \in S_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$. Soit $F : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow S_n(\mathbb{R})$ l'application qui à une matrice M associe tMSM . Calculer $D_I F$, ainsi que ses noyau et image.

(b) En déduire l'existence d'un voisinage V' de S dans $S_n(\mathbb{R})$, d'un voisinage W' de I dans $S_n(\mathbb{R})$, et d'un difféomorphisme $\psi : V' \rightarrow W'$ tels que $\psi(S) = I$ et :

$${}^t\psi(M)S\psi(M) = M \text{ pour tout } M \in V'.$$

(c) À l'aide de la formule de Taylor, montrer qu'il existe une fonction A définie sur un voisinage de 0, à valeurs dans $S_n(\mathbb{R})$, de classe \mathcal{C}^1 et telle que :

$$f(x) = (A(x)(x), x), \text{ et } f(0) = \frac{D_0^2f}{2}.$$

(d) Appliquer le résultat de la question (b) à $A(0)$. En déduire le lemme de Morse.