

Devoir numéro 3 : Nœux sur le tore

Le but de ce devoir est de déterminer le groupe d'homotopie de $\mathbb{R}^3 \setminus C$, où C appartient à une certaine famille de noeux. Dans ce qui suit, \mathbb{S}_3 désigne la sphère unité dans \mathbb{R}^4 , et $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / (2\pi\mathbb{Z})^2$. Le tore \mathbb{T}^2 se plonge dans \mathbb{R}^3 par :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{T}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto \begin{pmatrix} (\sqrt{2} + \cos(y)) \cos(x) \\ (\sqrt{2} + \cos(y)) \sin(x) \\ \sin(y) \end{pmatrix} \end{cases},$$

et dans \mathbb{S}_3 par :

$$\psi : \begin{cases} \mathbb{T}^2 & \rightarrow \mathbb{S}^3 \\ (x, y) & \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \\ \cos(y) \\ \sin(y) \end{pmatrix} \end{cases}.$$

Soient p et q deux entiers positifs, non tous deux nuls, et premiers entre eux ; en particulier, si l'un des deux entiers est nul, l'autre vaut nécessairement 1. On pose $B_{p,q} := \{(pt [2\pi], qt [2\pi]) : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{T}^2$, puis $C_{p,q} := \varphi(B_{p,q})$ et $C'_{p,q} := \psi(B_{p,q})$.

Enfin, on admettra le théorème de Van Kampen pour des recouvrements fermés :

Théorème 1 (Van Kampen, version fermés).

Soit X un espace topologique localement connexe par arcs. Soient U et V deux fermés de X . Supposons que U , V et $U \cap V$ sont tous trois connexes par arcs, localement connexes par arcs et délaçables. Soit $x \in U \cap V$. Alors :

$$\pi_1(X, x) \simeq \pi_1(U, x) *_{\pi_1(U \cap V, x)} \pi_1(V, x).$$

1. Dessiner $B_{2,3}$ et $C_{1,2}$.
2. Montrer que les espaces $(\mathbb{R}^3 \setminus C_{1,q})_{q \geq 0}$ sont tous homéomorphes.
3. Calculer $\pi_1(\mathbb{T}^2 \setminus B_{p,q}, x)$ pour tous p, q et tout $x \notin B_{p,q}$.
4. On pose :

$$\begin{cases} U_+ & := \{(u, v) \in (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2) \cap \mathbb{S}_3 : \|u\| \geq \|v\|\}, \\ U_- & := \{(u, v) \in (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2) \cap \mathbb{S}_3 : \|u\| \leq \|v\|\}. \end{cases}.$$

Montrer que U_+ et U_- sont tous deux homéomorphes au produit d'un disque fermé et d'un cercle (i.e. un "tore plein"), et que leur intersection est $\psi(\mathbb{T}^2)$.

5. On pose $U_{+,p,q} := U_+ \setminus C'_{p,q}$ et $U_{-,p,q} := U_- \setminus C'_{p,q}$. En utilisant le théorème de Van Kampen avec ces fermés, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{S}_3 \setminus C'_{p,q}$,

$$\pi_1(\mathbb{S}_3 \setminus C'_{p,q}, x) \simeq \langle a, b | a^p = b^q \rangle =: G_{p,q}.$$

6. Montrer qu'il existe un homéomorphisme de $\mathbb{S}_3 \setminus \{(0, 0, 1, 0)\}$ dans \mathbb{R}^3 qui envoie $\psi(\mathbb{T}^2)$ sur $\varphi(\mathbb{T}^2)$ et $C'_{p,q}$ sur $C_{p,q}$.
7. En déduire $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus C_{p,q}, x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^3 \setminus C_{p,q}$.

On peut ensuite démontrer – mais cela dépasse le cadre de ce devoir – que les groupes $(G_{p,q})_{\substack{1 < p < q \\ p \wedge q = 1}}$ sont tous distincts. En particulier, les espaces $(\mathbb{R}^3 \setminus C_{p,q})_{\substack{1 < p < q \\ p \wedge q = 1}}$ sont tous deux à deux non homéomorphes.