Devoir numéro 2 : Grassmaniennes

Soient $0 \leq k \leq n$ des entiers. On appelle *grassmannienne réelle*, et l'on note $Gr(k,n)$, l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension k de $\mathbb{R}^n$. Si $k=1$, on parle d'*espace projectif réel*. Le but de ce devoir est de munir les grassmanniennes d'une structure de sous-variété, et d'étudier leur topologie dans certains cas simples.

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne usuelle. L'idée centrale est que la donnée d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ est équivalente à la donnée d'une projection orthogonale sur ce sous-espace vectoriel. Cela permet de plonger les grassmanniennes dans des espaces de matrices. Pour p et q entiers, soit $M_{p,q}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{pq}$ l'espace des matrices réelles à p lignes et q colonnes. Dans ce devoir, on définit une projection orthogonale comme une projection sur un sous-espace vectoriel parallèlement au sous-espace vectoriel orthogonal. Soit alors :

$$Gr(k,n) := \{A \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \ : \ A \text{ est une projection orthogonale de rang } k\}.$$

Soit I_k la matrice diagonale dont les k premiers coefficients diagonaux sont des 1, et les $(n-k)$ suivants des 0.

Étant donnée une matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, on utilisera la décomposition par blocs :

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix},$$

où B est une matrice $k \times k$.

1. Soit $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in Gr(k,n)$ si et seulement si les trois conditions suivantes sont satisfaites :
   - $A^2 = A$;
   - ${}^tA = A$;
   - A est de rang k.
2. Montrer que $Gr(k,n) = \{P^{-1} I_k P \ : \ P \in O(n)\}$.
3. Montrer que $V := \{\det(B) \neq 0\}$ est un ouvert de $M_{n,n}(\mathbb{R})$. Soit $A \in V$. Montrer que A est de rang k si et seulement si $E - DB^{-1}C = 0$. On pourra multiplier A par une matrice bien choisie pour simplifier ses k premières lignes.

On définit :

$$\varphi : \begin{cases} U := \{A \in M_{n,k}(\mathbb{R}) \ : \ rg(A) = k\} & \to \quad M_{n,n}(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto \quad A({}^tAA)^{-1}\,{}^tA \end{cases},$$

et :

$$\psi : \begin{cases} M_{n-k,k}(\mathbb{R}) & \to \quad M_{n,n}(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto \quad \varphi\begin{pmatrix} I \\ M \end{pmatrix} \end{cases}.$$

4. Justifier le fait que φ soit bien définie.
5. Calculer $D\psi$. En déduire que ψ est une immersion $\mathcal{C}^\infty$. On pourra poser $Q(M) := (I + {}^tMM)^{-1}$.
6. Montrer que ψ est injective et que $\psi(M_{n-k,k}(\mathbb{R})) = Gr(k,n) \cap V$.
7. En déduire que $Gr(k,n)$ est une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ de $M_{n,n}(\mathbb{R})$ dont on précisera la dimension.
8. Expliciter l'espace tangent à $Gr(k,n)$ en I_k.
9. Montrer que $Gr(k,n)$ est compact.
10. Montrer que $Gr(k,n)$ et $Gr(n-k,n)$ sont $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphes.
11. Montrer que $Gr(0,n)$ est un point. Pour tout $n \geq 1$, montrer que $Gr(1,n)$ est homéomorphe à $\mathbb{S}_{n-1/\sim}$, où $x \sim -x$ pour tout $x \in \mathbb{S}_{n-1}$.