GÉOMÉTRIE

A. CHAMBERT-LOIR

Examen du 7 avril 2014 (3h)

Les notes de cours, les téléphones portables, ordinateurs ou tablettes, les conseils des voisins, etc. ne sont pas autorisés pendant l'épreuve. Justifiez s'il vous plaît toutes vos réponses par une preuve ou par une référence à un théorème discuté en cours. Il est toujours possible de sauter des questions que vous ne parvenez pas à résoudre, quitte à y a revenir après coup.

EXERCICE 1

Soit S l'ensemble des $(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$ tels que $x^2+y^2+z^2=1$ et C l'ensemble des $(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$ tels que $x^2+y^2-x=0$. On pose $A=S\cap C$.

1 Faire un dessin représentant S, C et A.

2 Démontrer que S et C sont des sous-variétés fermées de $\mathbf{R}^3$.

3 Soit $f\colon\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^2$ l'application donnée par

$$f(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2-1,x^2+y^2-x).$$

Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$; calculer sa différentielle.

4 Pour $m\in\mathbf{N}$, déterminer l'ensemble A_m des points $a\in A$ tels que D_af soit de rang m.

5 Quels sont les points de A dont un voisinage dans A est une sous-variété de $\mathbf{R}^3$? une variété topologique ?

6 On note B l'ensemble des points (x,y,z) de S tels que $z\geqslant 0$ et $x^2+y^2-x\leqslant 0$. Démontrer que B est une variété topologique à bord, homéomorphe à un disque fermé. Quel est son bord ? (Considérer la projection $(x,y,z)\mapsto(x,y)$.)

7 En considérant la projection $(x,y,z)\mapsto(y,z)$, démontrer que B est une sous-variété à bord de $\mathbf{R}^3$ de classe $\mathscr{C}^\infty$.

EXERCICE 2

On considère la forme quadratique de Lorentz sur $\mathbf{R}^4$ définie par $q(x,y,z,t)=x^2+y^2+z^2-t^2$ pour $(x,y,z,t)\in\mathbf{R}^4$; soit Q sa matrice, c'est-à-dire la matrice 4×4, diagonale, dont les coefficients diagonaux sont $1,1,1,-1$. Soit enfin G l'ensemble des matrices $A\in\mathrm{M}_4(\mathbf{R})$ telles que ${}^{\mathrm{t}}AQA=Q$.

1 Démontrer que G est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(4,\mathbf{R})$.

2 *a*) Démontrer que l'application $A\mapsto{}^{\mathrm{t}}AQA$ de $\mathrm{M}_4(\mathbf{R})$ dans $\mathrm{M}_4(\mathbf{R})$ est $\mathscr{C}^\infty$; calculer sa différentielle en tout point, et son rang.

b) Démontrer que G est une sous-variété de $\mathrm{GL}(4,\mathbf{R})$.

c) Expliciter son espace tangent à l'origine de G. En particulier, calculer sa dimension et vérifier qu'il est stable par le crochet de Lie $(A,B)\mapsto[A,B]=AB-BA$.

3 Soit C l'ensemble des vecteurs $v \in \mathbf{R}^4$ tels que $q(v) < 0$ (cône de lumière) ; soit C^+ et C^- les vecteurs $v = (x, y, z, t)$ de C tels que $t > 0$ (cône futur) et $t < 0$ (cône passé) respectivement. Soit G_0 la composante connexe de I_4 dans G et soit G_1 l'ensemble des matrices $A \in G$ telles que $A(C^+) \subset C^+$ et $\det(A) = 1$.

a) Démontrer que G_0 et G_1 sont des sous-groupes de G.

b) Démontrer que G_0 est ouvert dans G et que $G_0 \subset G_1$.

c) Démontrer que G_1 est distingué dans G et que le groupe quotient G/G_1 est isomorphe à $\{\pm 1\} \times \{\pm 1\}$.

4 Soit H l'ensemble des vecteurs $v = (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$ tels que $q(v) = -1$ et $t > 0$. On pose $v_0 = (0, 0, 0, 1)$.

a) Démontrer que H est une sous-variété de dimension 3, de classe $\mathscr{C}^\infty$, sans bord, et est isomorphe à $\mathbf{R}^3$.

b) Démontrer que l'action de G_1 sur $\mathbf{R}^4$ laisse stable H.

c) Démontrer que le fixateur du point v_0 dans G_1 est isomorphe à $\mathrm{SO}(3, \mathbf{R})$.

d) Démontrer que pour tout $v \in H$, il existe $A \in G_1$ tel que $A(v_0) = v$.

e) En déduire que G_1 est connexe et en conclure que $G_0 = G_1$.

f) Décrire les composantes connexes de G.

5 Pour $v = (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$, on pose $M(v) = \begin{pmatrix} t+z & x-iy \\ x+iy & t-z \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que $M(v)$ est une matrice hermitienne 2×2 et que $\det(M(v)) = -q(v)$. Inversement, si X est une matrice hermitienne 2×2, vérifier qu'il existe un unique vecteur $v \in \mathbf{R}^4$ tel que $X = M(v)$.

b) Démontrer que la formule $A \cdot X = {}^t\overline{A} X A$ définit une action de $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$ sur l'espace vectoriel des matrices hermitiennes 2×2.

c) Construire un homomorphisme de groupes $\varphi \colon \mathrm{SL}(2, \mathbf{C}) \to G$ caractérisé par $A \cdot M(v) = M(\varphi(A)(v))$ pour $v \in \mathbf{R}^4$ et $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$.

d) Démontrer que le noyau de φ est égal à $\pm \mathrm{I}_2$ et en déduire que l'image de φ contient G_0.

e) Démontrer que $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$ est connexe. En déduire que l'image de φ est égale à G_0.