Master MFA, 1re année, 2e semestre *Année 2014/2015*

GÉOMÉTRIE

A. CHAMBERT-LOIR

Examen du 12 juin 2015 (3h)

Les notes de cours, téléphones portables, ordinateur, les conseils des voisins, etc. ne sont pas autorisés pendant l'épreuve. Justifiez s'il vous plaît toutes vos réponses par une preuve ou par une référence à un théorème discuté en cours. Il est toujours possible de sauter des questions que vous ne parvenez pas à résoudre, quitte à y a revenir après coup.

EXERCICE 1

1 Décrire la projection stéréographique et ses principales propriétés.

2 Énoncer le théorème de Cartan et donner les grandes lignes de sa démonstration.

3 Énoncer le théorème de van Kampen. L'appliquer pour démontrer que le groupe fondamental du plan privé de n points est un groupe libre à n générateurs.

4 Soit m et n des entiers naturels tels que $m \geqslant 1$. On munit l'espace $\mathbf{R}^n$ de la norme euclidienne usuelle. Soit M une sous-variété fermée (sans bord) de $\mathbf{R}^n$, de dimension m en tout point. Soit T^1M l'ensemble des couples $(x, v) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ tels que $v \in T_xM$ et $\|v\| = 1$. Démontrer que T^1M est une sous-variété fermée de $\mathbf{R}^n$ de dimension $2m-1$ en tout point.

EXERCICE 2

1 Soit X un espace topologique, soit $x \in X$ et soit $c\colon [0,1] \to X$ un lacet dans X en x. Démontrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) Le lacet c est strictement homotope au lacet constant e_x en x ;

(2) Le lacet c est librement homotope à un lacet constant ;

(3) Il existe une application continue $f\colon \mathbf{B}_2 \to X$ du disque unité $\mathbf{B}_2$ dans X telle que $f(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) = c(t)$ pour tout $t \in [0,1]$.

2 Démontrer à l'aide de la question précédente qu'il n'existe pas d'appplication continue $f\colon \mathbf{B}_2 \to \mathbf{S}_1$ telle que $f(p) = p$ pour $p \in \mathbf{S}_1$. Ce résultat se généralise-t-il en dimension supérieure ?

3 Soit $P \in \mathbf{C}[T]$ un polynôme et soit n son degré. Le but de cette question est de donner une démonstration du théorème de d'Alembert-Gauss par la théorie du groupe fondamental.

a) On note $P = a_nT^n + \dots + a_0$ et $R = \max(1, (|a_0| + \dots + |a_{n-1}|)/|a_n|)$. Démontrer que toute racine complexe z de P vérifie $|z| \leqslant R$.

b) Soit r un nombre réel $> R$. Démontrer que l'application de $[0,1]$ dans $\mathbf{C}^*$ donnée par $t \mapsto P(re^{2\pi i t})$ est librement homotope à l'application $t \mapsto |a_n|\, e^{2\pi i n t}$, puis est librement homotope à l'application $t \mapsto e^{2\pi i n t}$.

c) Si $n \geqslant 1$, démontrer que P s'annule dans le disque de centre 0 et de rayon R.

EXERCICE 3

On note $\mathbf{S}_2$ la sphère unité de $\mathbf{R}^3$. Soit f l'application de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^6$ donnée par

$$f(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2, 2yz, 2zx, 2xy).$$

On note F sa restriction à $\mathbf{S}_2$ et on pose $P = F(\mathbf{S}_2)$.

1 *a*) Soit p un point de $\mathbf{S}_2$. Comment s'exprime l'application tangente $T_pF\colon \mathbf{T}_p\mathbf{S}_2 \to T_{F(p)}\mathbf{R}^6$? En déduire que f est une immersion en tout point de $\mathbf{S}_2$.

b) À quelle condition deux points de $\mathbf{S}_2$ ont-ils même image par F ?

c) Démontrer que P est une sous-varieté de $\mathbf{R}^6$ et que F induit un revêtement de degré 2 de $\mathbf{S}_2$ sur P.

d) Démontrer que P est isomorphe au plan projectif $\mathbf{P}_2(\mathbf{R})$.

2 Soit $q\colon \mathbf{R}^6 \to \mathbf{R}^3$ la projection sur les trois dernières coordonnées (donnée par $q(x_1,\ldots,x_6) = (x_4,x_5,x_6)$) et soit $G = q\circ F$. On pose $R = G(\mathbf{S}_2) = q(P)$ (« surface romaine de Steiner »).

a) Démontrer que R est l'ensemble des points (a,b,c) de $\mathbf{R}^3$ vérifiant $b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2 = 2abc$ et $\sup(|a|,|b|,|c|) \leqslant 1$.

b) En quels points $p \in \mathbf{S}_2$ l'application G est-elle une immersion ?

c) Soit p un point de R. Démontrer que R est une sous-variété en p si et seulement si $G^{-1}(p)$ est de cardinal 2.

d) Déterminer le cône tangent à R en tout point de R. (Discuter suivant le cardinal de $G^{-1}(p)$.)