TD 6
Convergences de variables aléatoires

Convergence en loi

On admettra dans cette partie le résultat suivant :

Theorème (Convergence faible de variables aléatoires discrètes)**.**
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires à valeurs entières. Soit X une variable aléatoire à valeurs entières. Alors la suite (X_n) converge en loi vers X si et seulement si $\mathbb{P}(X_n = k)$ converge vers $\mathbb{P}(X = k)$ pour tout entier k.

1. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires réelles. Supposons qu'il existe une variable aléatoire Y telle que (X_n) converge vers Y en loi. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrez que $(f(X_n))$ converge en loi vers $f(Y)$. Que se passe-t-il si on remplace la convergence en loi par la convergence presque sûre ?

2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires qui valent $1/n$ avec probabilité 1.
   (a) Soit f une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}$. Montrez que $\mathbb{E}(f(X_n))$ converge vers $f(0)$. En déduire que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers 0.
   (b) Calculez la fonction caractéristique de X_n. Déduisez-en que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers 0.
   (c) Montrez que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers 0. Déduisez-en que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers 0.

3. Soit σ_n une suite de réels strictement positifs convergeant vers 0. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires qui suivent une loi normale d'espérance 0 et de variance σ_n^2.
   (a) Calculez la fonction caractéristique de X_n. Déduisez-en que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers 0.
   (b) Montrez que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers 0. Déduisez-en que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers 0.
   (c) Que se passe-t-il si X_n est d'espérance μ_n et non 0, où (μ_n) est une suite de réels convergeant vers 0 ?

4. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires qui suivent une loi discrète uniforme sur $\{0, 1/n, \cdots, (n-1)/n\}$.
   (a) Soit f une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}$. Montrez que $\mathbb{E}(f(X_n))$ converge vers $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$. Déduisez-en que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$.
   (b) Calculez la fonction caractéristique de X_n. Déduisez-en que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$.

5. Soit $\lambda > 0$. Soit $(X_n)_{n\geq\lceil\lambda\rceil}$ une suite de variables aléatoires qui suivent une loi binomiale $B(n, \lambda/n)$.
   (a) Calculez la fonction caractéristique de X_n. Déduisez-en que (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ.
   (b) Utilisez le théorème en début de TD pour montrer que (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ.
   (c) Application : au loto, les chances d'obtenir au moins quatre bon numéros sont de l'ordre de une sur 9500. Il y a trois tirages par semaine, soit environ 150 tirages par an. Quelqu'un joue une grille à chaque tirage pendant 30 ans. Estimez la probabilité qu'elle n'obtienne jamais une telle combinaison, qu'elle l'obtienne exactement une fois, et qu'elle l'obtienne exactement cinq fois.

Autres modes de convergence

6. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in (0, 1]$, on pose $X_t(x) := x^t$. On voit la famille de fonctions (X_t) comme des variables aléatoires sur $(0, 1]$ muni de la mesure de Lebesgue, i.e. on suppose que x suit une loi uniforme sur $(0, 1]$.
   (a) Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. Montrez que (X_t) converge presque sûrement vers X_{t_0} quand t converge vers t_0. Déduisez-en que (X_t) converge en loi vers X_{t_0} quand t converge vers t_0.
   (b) Montrez que X_t est intégrable si et seulement si $t > 1$.
   (c) Montrez que (X_t) ne converge pas vers X_1 dans $\mathbb{L}^1$ quand t converge vers 1.

7. Soit $\alpha \geq 1$. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variable aléatoires indépendantes telle que X_n suive une loi de Bernoulli de paramètre $n^{-\alpha}$. On rappelle (TD 5, exercice 11) que, presque sûrement, il existe une infinité d'entiers n tels que $X_n = 1$. Montrez que la suite de variables aléatoires (X_n) converge vers 0 en probabilité et dans $\mathbb{L}^p$ pour tout $p \in [1, \infty)$, mais ne converge pas vers 0 presque sûrement ou dans $\mathbb{L}^\infty$.