TD 5
Inégalités probabilistes et indépendance

Inégalité de Markov

1. Rappelez l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et redémontrez-la à partir de l'inégalité de Markov.

2. **Une formule alternative pour l'espérance**
Dans ce qui suit, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire à valeurs réelles.
   (a) Soit $p \in [1, \infty)$. Supposons que $X \in \mathbb{L}^p$. Trouvez une constante C telle que $\mathbb{P}(|X| \geq t) \leq Ct^{-p}$ pour tout $t > 0$.
   (b) Pour tout $(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+$, on pose $f(\omega, t) = 1$ si $|X|(\omega) \geq t$, et 0 sinon. En intégrant la fonction f sur $\Omega \times \mathbb{R}_+$ de deux manières différentes (théorème de Fubini), montrez que :
$$\mathbb{E}(|X|) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(|X| \geq t)\,\mathrm{d}t.$$
   (c) On cherche à généraliser cette identité. Montrez que, pour tout $p \in [1, \infty)$,
$$\mathbb{E}(|X|^p) = \int_0^{+\infty} pt^{p-1}\mathbb{P}(|X| \geq t)\,\mathrm{d}t.$$
   (d) Déduisez-en que s'il existe des constantes $C, \varepsilon > 0$ telle que $\mathbb{P}(|X| \geq t) \leq Ct^{-p-\varepsilon}$ pour tout $t > 0$, alors $X \in \mathbb{L}^p$.

3. **Bornes de Chernoff**
Soit X une variable aléatoire réelle. On définit une fonction ψ par $\psi(y) := \ln(\mathbb{E}(e^{yX}))$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. On admettra que cette fonction est bien définie et à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
   (a) Soit $t \in \mathbb{R}$. Remarquez que $\mathbb{P}(X \geq t) = \mathbb{P}(e^{yX} \geq e^{yt})$ pour tout $y > 0$. Déduisez-en que, pour tout $y > 0$,
$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq e^{\psi(y)-yt}.$$
   (b) Supposons que X suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Que vaut la fonction ψ (voir le TD 3) ? Pour quelle valeur de y la fonction $\psi(y) - yt$ est-elle minimale ? Montrez que, si $t \geq m$,
$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}.$$
   (c) Supposons que X suit une loi de Poisson de paramètre λ. Que vaut la fonction ψ (voir le TD 3) ? Pour quelle valeur de y la fonction $\psi(y) - yt$ est-elle minimale ? Déduisez-en que, si $t \geq \lambda$,
$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq e^{-\lambda\left(\frac{t}{\lambda}-1+\frac{t}{\lambda}\ln\left(\frac{t}{\lambda}\right)\right)}.$$

Inégalité de Jensen

On admettra dans cette partie le résultat suivant :

Theorème (Inégalité de Jensen)**.**
Soit X une variable aléatoire réelle intégrable. Soit φ une fonction convexe bornée inférieurement (i.e. telle que $\varphi \geq a$ pour un certain réel a). Alors $\varphi(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(\varphi(X))$.

4. Retrouvez le fait que la variance $\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$ est toujours positive.

5. Montrez que, pour tous $p, q \in [1, \infty)$, si $p \leq q$ alors $\|X\|_{\mathbb{L}^p} \leq \|X\|_{\mathbb{L}^q}$. Indication : appliquez l'inégalité de Jensen avec la fonction $\phi(y) := |y|^{q/p}$.

6. **Entropie d'une variable aléatoire**
Soit Ω un ensemble dénombrable. Soit μ une loi de probabilité sur Ω. On suppose que $\mu(\omega) > 0$ pour tout $\omega \in \Omega$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans Ω et de loi μ. On appelle *entropie de Shannon*[1] de μ la quantité :
$$H(\mu) := \mathbb{E}(-\ln(\mu(X))) = -\sum_{\omega\in\Omega} \mu(\omega)\ln\mu(\omega),$$
où l'on pose que la fonction $h : x \mapsto x\ln(x)$ vaut 0 en 0.

1. Cette quantité est souvent définie avec un logarithme en base 2, ce qui est plus utile en informatique.

(a) Montrez que la fonction h est continue, convexe sur $\mathbb{R}_+$, et négative sur $[0,1]$.
(b) Supposons que Ω est fini et de cardinal M. Montrez que $0 \leq H(\mu) \leq \ln(M)$. Indication : considérez $X : \omega \mapsto \mu(\omega)$ comme une variable aléatoire sur Ω muni de la loi uniforme, et travaillez sur la quantité $\mathbb{E}(h(X))$.
(c) Calculez l'entropie d'une loi géométrique de paramètre p.
(d) Soit Ω' un ensemble dénombrable, et soit ν une loi de probabilité sur Ω'. On définit une loi de probabilité $\mu \otimes \nu$ sur $\Omega \times \Omega'$ par $\mu \otimes \nu(\omega, \omega') = \mu(\omega)\nu(\omega')$. Montrez que $H(\mu \otimes \nu) = H(\mu) + H(\nu)$.

Indépendance

7. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Dans les trois cas suivants, décrivez la loi du couple (X,Y) :
   (a) X suit une loi géométrique de paramètre p, et Y suit une loi binomiale de paramètres (n,q) ;
   (b) X suit une loi de Poisson de paramètre λ, et Y suit une loi exponentielle de paramètre μ ;
   (c) X et Y suivent une loi normale de paramètres $(0,1)$ et $(1,1)$ respectivement.

8. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme dans $[0,1]$. Quelle est la loi du couple de variables aléatoires $(\min\{X,Y\}, \max\{X,Y\})$?

9. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes chacune de loi normale de paramètres $(0,1)$. Montrez que les variables aléatoires $(X+Y)/\sqrt{2}$ et $(X-Y)/\sqrt{2}$ sont indépendantes, et suivent chacune une loi normale de paramètres $(0,1)$.

10. **SÉLECTION ALÉATOIRE**
    Soit N une variable aléatoire à valeurs entières positives, et soit $p \in [0,1]$. On tire N objets, puis l'on garde chaque objet avec probabilité p indépendamment des autres objets et du tirage initial [2]. On cherche à connaître la loi du nombre M d'objets restants après cette opération. Pour cela, on se donne une suite $(X_k)_{k\geq 0}$ de variables aléatoires indépendantes, indépendantes de N, et suivant une loi de Bernoulli de paramètre p.
    (a) Expliquez brièvement pourquoi $M = \sum_{k=0}^{N-1} X_k$ en loi, où cette somme vaut 0 si $N=0$ par convention.
    (b) Montrez que $\mathbb{E}(M) = p\mathbb{E}(N)$. Indication : utiliser le fait que $\mathbb{E}(M) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(M|N))$.
    (c) Soient $n \geq 0$, et $(Y_k)_{k\geq 0}$ une suite de variable aléatoires réelles, indépendantes et identiquement distribuées. Exprimez la fonction caractéristique de $\sum_{k=0}^{n-1} Y_k$ à partir de la fonction caractéristique de Y_0.
    (d) Déduisez-en $\mathbb{E}(e^{i\xi M}|N)$.
    (e) Déduisez-en une formule donnant $\mathbb{E}(e^{i\xi M})$.
    (f) Quelle est la loi de M si N suit une loi géométrique de paramètre q ? Et si N suit une loi de Poisson de paramètre λ ?

Lemme de Borel-Cantelli

11. Soit $\alpha > 0$. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires telles que X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre $n^{-\alpha}$.
    (a) Montrez que si $\alpha > 1$, alors presque sûrement toutes les X_n sont nulles à partir d'un certain rang ;
    (b) Montrez que si $\alpha \leq 1$ et si les $(X_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes, alors presque sûrement une infinité de X_n sont non nulles.

12. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, et de loi uniforme sur $[0,1]$.
    (a) Montrez que, pour tout $C > 0$, presque sûrement, il existe une infinité d'entiers $n \geq 1$ tels que $X_n \leq C/n$.
    (b) Déduisez-en que, presque sûrement, pour tout $C > 0$, il existe une infinité d'entiers $n \geq 1$ tels que $X_n \leq C/n$.
    (c) Déduisez-en que, presque sûrement, $\liminf_{n\to+\infty} nX_n = 0$.

13. On dit qu'un nombre rationnel $p/q \geq 0$ est sous forme réduite si p et q sont des entiers positifs et si $PGCD(p,q) = 1$, ou si $(p,q) = (0,1)$. Remarquons que pour tout $q > 0$, il existe au plus $q+1$ rationnels dans $[0,1]$ dont le dénominateur sous forme réduite vaut q.
    Soient $C, \varepsilon > 0$. On tire un nombre un nombre au hasard X dans $[0,1]$ suivant un loi uniforme. Montrez que, presque sûrement, il n'existe qu'un nombre fini de rationnels $p/q \in [0,1]$ tels que :

$$\left| X - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{C}{q^{2+\varepsilon}}.$$

2. On peut penser, par exemple, que chaque objet a une probabilité $1-p$ d'être défectueux.

Sommes de variables aléatoires indépendantes

14. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, et soient $p \in (0,2]$ et $C > 0$. On suppose que la fonction caractéristique de X_0 vérifie $\mathbb{E}(e^{itX_0}) = 1 - C|t|^p + o(|t|^p)$ en 0.
Pour tout $n \geq 0$, on note $S_n := \sum_{k=0}^{n-1} X_k$. Calculez la limite de la fonction caractéristique de $n^{-1/p} S_n$ quand n tend vers $+\infty$ [3].

15. **UNE RÉCIPROQUE À LA LOI DES GRANDS NOMBRES**
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. On suppose que X_0 est positif presque sûrement, et que $\mathbb{E}(X_0) = +\infty$.
   (a) Soit $C > 0$. Montrez que pour toute variable aléatoire X presque sûrement positive :
$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq t)\ \mathrm{d}t \leq C \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq Cn).$$
   (b) On admettra les résultats de l'exercice 2. Déduisez-en que, pour tout $C > 0$, on a :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_n \geq Cn) = +\infty.$$
   (c) Montrez que, presque sûrement, pour tout $C > 0$, il existe une infinité d'entiers $n \geq 0$ tels que $X_n \geq Cn$.
   (d) Montrez que, presque sûrement,
$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X_k = +\infty.$$

16. **MARCHE ALÉATOIRE ARRÊTÉE**
Soient $a < b$ des entiers. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, et telle que $\mathbb{P}(X_0 = 1) = \mathbb{P}(X_0 = -1) = 1/2$. Pour tout $n \geq 0$, on note $S_n := \sum_{k=0}^{n-1} X_k$. Pour tout $x \in [a,b]$ entier, on note :
$$\tau(x) := \inf\{n \geq 0 : x + S_n \in \{a,b\}\},$$
et :
$$f(x) := \mathbb{P}(x + S_{\tau(x)} = b).$$
On admettra que $\tau(x)$ est presque sûrement fini, et donc que la fonction f est bien définie [4].
   (a) Calculez $\tau(a)$, $\tau(b)$, $f(a)$ et $f(b)$.
   (b) Supposons que $x \in (a,b)$. Que valent $\mathbb{P}(x + S_{\tau(x)} = b | X_0 = -1)$ et $\mathbb{P}(x + S_{\tau(x)} = b | X_0 = 1)$?
   (c) Montrez que, pour tout $x \in (a,b)$ entier, on a $f(x) = (f(x-1) + f(x+1))/2$.
   (d) Calculez la fonction f.
   (e) Application : on dispose au départ d'une somme d'un euro. A chaque étape, s'il nous reste de l'argent, on mise un euro sur un jeu de pile ou face : cet euro est doublé si on gagne, et perdu sinon. On s'arrête si on est ruiné (on a alors perdu), ou si on arrive à dix euros (on a alors gagné). Quelle est la probabilité de gagner ?
   (f) Pour aller plus loin : que se passe-t-il si la pièce avec laquelle on joue à pile ou face est biaisée, de telle sorte que l'on a une probabilité $p \in (0,1)$ de gagner à chaque coup ?

3. La loi limite est un cas particulier de loi stable de Lévy.
4. On appelle τ le temps d'atteinte de $\{a,b\}$ en partant de x