# TD 3
## Variables aléatoires discrètes

1. Soit $X$ une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \geq 0$.
   (a) Montrez par un calcul direct que $\mathbb{E}(X) = Var(X) = \lambda$.
   (b) Calculez $\mathbb{E}(\frac{1}{1+X})$.

2. Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z} - \{0\}$, dont la loi est donnée par :
$$\mathbb{P}(X = n) = 2^{-|n|-1} \ \forall n \in \mathbb{Z} - \{0\}.$$
   (a) Quelle est la loi de la variable aléatoire $Y := X^2$ ?
   (b) Quelle est la loi de la variable aléatoire $Z := 2 + \pi \cos(\pi X)$ ?

3. Soit $X$ une variable aléatoire qui suit une loi géométrique de paramètre $p \in (0, 1)$.
   (a) Retrouvez par un calcul direct la valeur de $\mathbb{E}(X)$.
   (b) Pour quels réels $s$ la valeur $\mathbb{E}(s^X)$ est-elle bien définie ?
   (c) Calculez $f(s) := \mathbb{E}(s^X)$ pour ces valeurs de $s$.
   (d) Que vaut $f'(0)$ ?

4. Soit $M > 0$ un entier. Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes, et qui suivent toutes deux une loi uniforme sur $\{0, \cdots, M\}$. Quelle est la loi de la variable aléatoire $X + Y$ ? Et celle de la variable aléatoire $X - Y$ ?

5. Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes, et qui suivent toutes deux une loi géométrique de paramètre $p \in (0, 1)$. On pose :
$$\begin{aligned} S &:= \min\{X, Y\}, \\ T &:= |X - Y|. \end{aligned}$$
   (a) Calculez la loi du couple $(S, T)$, c'est-à-dire la valeur de $\mathbb{P}((S, T) = (s, t))$ pour tous entiers $s$ et $t$ positifs. Indice : distinguer les cas $t = 0$ et $t > 0$.
   (b) Déduisez-en la loi de $S$ et celle de $T$. Calculez $\mathbb{E}(T)$.
   (c) Les variables aléatoires $S$ et $T$ sont-elles indépendantes ?

6. Une poule pond un nombre d'oeufs $X$ tous les mois. On suppose que la variable aléatoire $X$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \geq 0$. Chaque oeuf donne naissance à un poussin avec probabilité $p \in [0, 1]$, indépendamment des autres oeufs. Soit $Y$ le nombre total de poussins nés dans le mois.
   (a) Calculez la loi de $Y$ sachant $X$.
   (b) Déduisez-en la loi de $Y$.
   (c) Quelle est la loi de $X$ sachant $Y$ ?

7. Une machine-outils produit à la chaîne des objets manufacturés. En période de marche normale, la probabilité pour qu'un objet soit défectueux est de $p \in [0, 1]$, et chaque objet peut être défectueux indépendamment des autres objets. On se propose de vérifier la machine. À cet effet, on choisit un entier positif $r$, et on définit la variable aléatoire $T_r$ comme étant *le nombre minimum de prélèvements successifs qu'il faut effectuer pour amener $r$ objets défectueux*. Calculez la loi de $T_r$ en fonction de $r$ et de $p$.

8. On suppose que, parmi 500 conseillers à la Cour d'Appel, il y en a $r := 200$ qui déclarent avoir des affinités avec les partis de gauche, et $d := 300$ avec les partis de droite. Soit $n = 2p + 1$ un entier impair. On choisit au hasard $n$ de ces magistrats pour former un tribunal.
   (a) Donnez une expression de la probabilité que ce tribunal ait une majorité de droite.
   (b) Caculez-en une valeur approchée pour $p = 4$, 8 et 20.

9. Un examen se déroule sous la forme d'un questionnaire à choix multiples. Il y a en tout 20 questions. Chaque question comporte 4 réponses possibles, dont une et une seule bonne réponse. Une réponse juste rapporte 1 point, et une réponse fausse aucun. On suppose que le programme pour l'examen comporte 100 points, parmi lesquels on tire au hasard, et indépendamment, 20 points correspondant aux 20 questions de l'examen.
   Un étudiant, souffrant d'un manque de motivation. décide de ne réviser que les $100p$ premiers points du programme, où $p \in [0, 1]$. Au cours de l'examen, si une question porte sur un point qu'il a révisé, alors il est capable de trouver la bonne réponse à coup sûr ; sinon, il choisit une réponse au hasard parmi les quatre possibles.

(a) Soit $X$ le nombre de questions de l'examen portant sur un point que l'étudiant a révisé. Quelle est la loi de $X$ ? Déduisez-en $\mathbb{E}(X)$.
(b) Soit $Y$ le nombre de bonnes réponses données (au hasard) par le candidat parmi les points non révisés. Quelle est la loi de $Y$ sachant $X$ ?
(c) Montrez que $\mathbb{E}(Y|X) = 5 - \frac{X}{4}$. En déduire $\mathbb{E}(Y)$.
(d) Soit $N$ la note du candidat. Montrez que $\mathbb{E}(N) = 15p + 5$.

10. **DE LA LOI UNIFORME AUX LOIS DISCRÈTES**

(a) Soit $p \in [0, 1]$. Soit $X$ une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$. Quelle est la loi de $1_{[0,p]}(X)$ ?
(b) Soient $a$ et $b$ deux réels. Construisez, à partir de $X$, une variable aléatoire valant $a$ avec probabilité $p$ et $b$ avec probabilité $1 - p$.
(c) On se donne cette fois-ci un triplet $(p, q, r) \in [0, 1]^3$ tel que $p + q + r = 1$, ainsi que trois réels $a$, $b$ et $c$. Construisez, à partir de $X$, une variable aléatoire valant $a$ avec probabilité $p$, valant $b$ avec probabilité $q$, et valant $c$ avec probabilité $r$.