# Licence 3 - PSIN - 2013-2014 - Correction de l'examen

## Exercice 1

**Question 1 :** Pour tout $n \geq 1$, notons $F_n$ l'évènement "La personne fume le jour $n$", de telle sorte que $p_n = \mathbb{P}(F_n)$. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \mathbb{P}(F_{n+1}) \\ &= \mathbb{P}(F_{n+1}|F_n)\mathbb{P}(F_n) + \mathbb{P}(F_{n+1}|F_n^c)\mathbb{P}(F_n^c) \\ &= p_n\mathbb{P}(F_{n+1}|F_n) + (1-p_n)\mathbb{P}(F_{n+1}|F_n^c). \end{aligned}$$

D'après l'énoncé, $\mathbb{P}(F_{n+1}|F_n) = 1/2$ et $\mathbb{P}(F_{n+1}|F_n^c) = 1/4$. Donc :

$$p_{n+1} = \frac{p_n}{2} + \frac{1-p_n}{4} = \frac{1+p_n}{4}.$$

**Question 2**[1] **:** Soit $f : x \mapsto (1+x)/4$. La suite $(p_n)$ vérifier la relation de récurrence $p_{n+1} = f(p_n)$ pour tout $n \geq 1$. La fonction $f$ a un unique point fixe en $1/3$. Posons $q_n := p_n - 1/3$. Alors, :

$$q_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{1+p_n}{4} - \frac{1}{3} = \frac{p_n}{4} - \frac{1}{12} = \frac{q_n}{4}.$$

Une récurrence simple montre alors que $q_n = q_1/4^{n-1}$ pour tout $n \geq 1$, d'où :

$$p_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{4^{n-1}}\left(p_1 - \frac{1}{3}\right).$$

**Question 3 :** Quand $n$ tend vers l'infini, la suite $(p_n)_{n\geq 1}$ converge vers $1/3$.

## Exercice 2

**Question 1 :** Soit $F_M$ la fonction de répartition de la variable aléatoire $M$. Par définition, pour tout réel $t$,

$$F_M(t) = \mathbb{P}(M \leq t) = \mathbb{P}(\max\{X_1, \cdot, X_n\} \leq t) = \mathbb{P}\left(\bigwedge_{i=1}^{n}\{X_i \leq t\}\right).$$

Les variables aléatoires $(X_i)_{i\leq i\leq n}$ étant indépendantes,

$$F_M(t) = \prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X_i \leq t).$$

[1] Il s'agit ici d'exprimer explicitement une suite arithmético-géométrique. Plusieurs méthodes fonctionnent. On peut par exemple utiliser de l'algèbre linéaire, en écrivant $(p_{n+1}\ 1) = M(p_n\ 1)$ pour une certaine matrice $M$, puis en calculant explicitement $M^n$. La méthode employée ici est plus spécialisée, mais plus rapide. Elle consiste à identifier dans un premier temps le point fixe de la fonction de récurrence, puis à retrancher ce point fixe à la suite.

Les variables aléatoires $(X_i)_{i\leq i\leq n}$ étant identiquement distribuées,

$$F_M(t) = \mathbb{P}(X_1 \leq t)^n = F(t)^n.$$

**Question 2**[2] **:** Soit $F_m$ la fonction de répartition de la variable aléatoire $m$. Par définition, pour tout réel $t$,

$$\begin{aligned} 1 - F_m(t) &= \mathbb{P}(m > t) \\ &= \mathbb{P}(\min\{X_1, \cdot, X_n\} > t) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigwedge_{i=1}^{n}\{X_i > t\}\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i > t) \\ &= \mathbb{P}(X_1 > t)^n \\ = (1 - F(t))^n, \end{aligned}$$

d'où :

$$F_m(t) = 1 - (1 - F(t))^n.$$

**Question 3 :** La densité $\rho$ est continue par morceau, donc la fonction de répartition $F$ est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Au vu de leurs expressions explicites, les fonctions $F_m$ et $F_M$ sont elles aussi continues et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. En les dérivant, on obtient les densité de $m$ et de $M$ respectivement. La densité de $m$ est donnée par :

$$\rho_m(t) = F_m'(t) = -n(1-F)'(t)(1-F(t))^{n-1} = nF'(t)(1-F(t))^{n-1} = n\rho(t)(1-F(t))^{n-1}.$$

La densité de $M$ est donnée par :

$$\rho_M(t) = F_M'(t) = nF'(t)F(t)^{n-1} = n\rho(t)F(t)^{n-1}.$$

**Question 4 :** Supposons que $X_1$ suit une loi uniforme sur $[0, 1]$. Alors $\rho(t) = 1_{[0,1]}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et $F(t) = t$ pour tout $t \in [0, 1]$. On a donc :

$$\rho_M(t) = n\rho(t)F(t)^{n-1} = n1_{[0,1]}(t)F(t)^{n-1} = n1_{[0,1]}(t)t^{n-1}.$$

Par conséquent,

$$\mathbb{E}(M) = \int_{\mathbb{R}} tn \cdot 1_{[0,1]}(t)t^{n-1}\, \mathrm{d}t = n\int_0^1 t^n\, \mathrm{d}t = \frac{n}{n+1}.$$

**Question 5**[3] **:** Pour tout $1 \leq i \leq n$, posons $X_i' := 1 - X_i$. Les variables aléatoires $X_i'$ sont indépendantes (car les $X_i$ le sont) et identiquement distribuées (car les $X_i$ le sont). De plus, si une variable aléatoire $X$ suit une loi uniforme sur $[0, 1]$, alors $1 - X$ suit aussi une loi uniforme sur $[0, 1]$ ; en effet, pour toute fonction continue bornée $f$,

$$\mathbb{E}(f(X)) = \int_0^1 f(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^1 f(1-t)\, \mathrm{d}t = \mathbb{E}(f(1-X)).$$

[2]La méthode est très semblable à celle de la question 1. Les justifications sont donc moins détaillées.

[3]Le calcul est très similaire à celui de la question précédente. Nous laissons cette méthode à létudiant motivé, et donnons ici un autre argument, dit *de couplage*.

La suite $(X'_i)_{1\leq i\leq n}$ a donc la même loi que la suite $(X_i)_{1\leq i\leq n}$. Notons $M' := \max\{X'_1, \cdots, X'_n\}$. Alors $M'$ a la même loi que $M$. De plus,

$$M' = \max\{1-X_1, \cdots, 1-X_n\} = 1 + \max\{-X_1, \cdots, -X_n\} = 1 - \min\{X_1, \cdots, X_n\} = 1 - m,$$

d'où $m = 1 - M'$. Donc $m$ a la même loi que $1 - M$. En particulier,

$$\mathbb{E}(m) = \mathbb{E}(1-M) = 1 - \mathbb{E}(M) = \frac{1}{n+1}.$$

# Exercice 3

**Question 1 :** Voir le cours.

**Question 2 :** Soit $\xi \in \mathbb{R}$. On calcule :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(E^{i\xi X}) &= \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi t}\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|t|}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\lambda}{2}\left(\int_0^{+\infty} e^{(i\xi-\lambda)t}\,\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^0 e^{(i\xi+\lambda)t}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{\lambda}{2}\left(\left[\frac{1}{i\xi-\lambda}e^{(i\xi-\lambda)t}\right]_0^{+\infty} + \left[\frac{1}{i\xi+\lambda}e^{(i\xi+\lambda)t}\right]_{-\infty}^0\right) \\
&= \frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{i\xi+\lambda} - \frac{1}{i\xi-\lambda}\right) \\
&= \frac{\lambda}{2}\frac{2\lambda}{(\lambda+i\xi)(\lambda-i\xi)} \\
&= \frac{\lambda^2}{\lambda^2+\xi^2} \\
&= \frac{1}{1+\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)^2}.
\end{aligned}$$

**Question 3 :** Une variable aléatoire valant 0 presque sûrement a une fonction caractéristique constante égale à 1. Pour tout réel $\xi$,

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}(E^{i\xi X_n}) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{\xi}{\lambda_n}\right)^2} = 1.$$

La suite $(X_n)_{n\geq 0}$ converge donc en loi vers 0.

**Question 4[4] :** Soit $\varepsilon > 0$. On veut montrer que $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) = 0$. Par un calcul explicite :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|X_n| < \varepsilon) &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{\lambda_n}{2}e^{-\lambda_n|t|}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\varepsilon}\lambda_n e^{-\lambda_n t}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[-e^{-\lambda_n t}\right]_0^{\varepsilon} \\
&= 1 - e^{-\lambda_n\varepsilon},
\end{aligned}$$

d'où $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} e^{-\varepsilon\lambda_n} = 0$.

[4] Un théorème affirme que si une suite de variables aléatoires converge en loi vers une constante, alors elle converge en probabilité vers cette constante. Nous éviterons de l'utiliser ici.

# Exercice 4

**Question 1 :** La variable aléatoire $Z$ suit une loi normale. Ses paramètres sont son espérance et sa variance.

L'espérance d'une somme de variable aléatoires est la somme des espérances, donc $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = 0$.

La variance d'une somme de variable aléatoires *indépendantes* est la somme des variances, donc $\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) = 2$.

**Question 2 :** La variable aléatoire $Z$ suit une loi normale d'espérance 0 et de variance 2. On a donc $\mathbb{E}(e^{i\xi Z}) = e^{-\xi^2}$ pour tout réel $\xi$.

**Question 3 :** Les variables aléatoires $X$ et $Y$ sont indépendantes et identiquement distribuées. On a donc, pour tout réel $\xi$ :

$$\mathbb{E}(e^{i\xi(X+Y)}) = \mathbb{E}(e^{i\xi X}e^{i\xi Y}) = \mathbb{E}(e^{i\xi X})\mathbb{E}(e^{i\xi Y}) = \mathbb{E}(e^{i\xi X})^2 = e^{-\xi^2}.$$

Donc, pour tout réel $\xi$, on a $\mathbb{E}(e^{i\xi(X+Y)}) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}$ ou $\mathbb{E}(e^{i\xi(X+Y)}) = -e^{-\frac{\xi^2}{2}}$. Mais on sait que la fonction $\xi \mapsto \mathbb{E}(e^{i\xi(X+Y)})$ est continue, et vaut 1 en 0. Si cette fonction était négative en un point, alors elle serait nulle quelque part par le théorème des valeurs intermédiaires, ce qui est impossible (un exponentielle n'est jamais nulle). Cette fonction est donc toujours positive. On a donc $\mathbb{E}(e^{i\xi(X+Y)}) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}$ partout.

**Question 4 :** La variable aléatoire $X$ suit donc une loi normale d'espérance nulle et de variance 1.

**Question 5 :** On a montré la proposition suivante : "Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Si $X + Y$ suit une loi normale, alors $X$ suivent aussi une loi normale."

Une proposition réciproque est : "Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Si $X$ suit une loi normale, alors $X + Y$ suit aussi une loi normale."

Cette réciproque est vraie (voir le cours).