

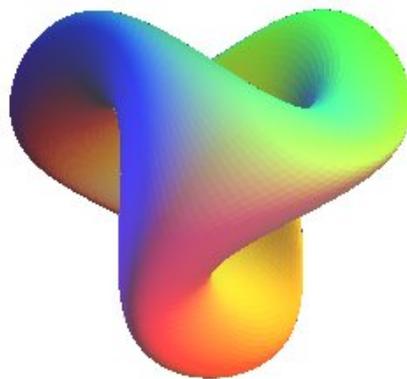
Volumes Mixtes

Sous la direction de Damien Thomine

Loïc Thomassey

Joris Ploux

Mémoire de mathématiques



L3 MFA
Université d'Orsay
France
15 mai 2019

Volumes mixtes

Mesures intrinsèques et théorème de Steiner

Introduction

Le sujet de ce mémoire porte sur la géométrie convexe, un sujet dont l'origine remonte au XVIII^e siècle et au célèbre problème de l'aiguille de Buffon qui consistait à calculer une approximation de π à l'aide uniquement d'une aiguille et d'un plan quadrillé. Si la méthode proposée par le mathématicien italien pour le calcul des décimales de π n'a guère rencontré le succès escompté, elle a néanmoins ouvert un vaste champ de recherche sur un domaine aujourd'hui riche et foisonnant.

La géométrie convexe a cela d'intéressant qu'elle permet de formaliser des notions telles le volume, le périmètre qui, si la plupart du temps nous apparaissent comme complètement naturelles, se révèlent *a posteriori* être assez délicates à étudier, voire parfois contre-intuitives. Le terme convexe est par ailleurs fondamental puisque, sortir de ce cadre c'est s'exposer bon gré mal gré à un certain nombre de pathologies auxquelles il est impossible de remédier. Sortir de ce cadre, c'est faire le choix de rentrer dans un monde où l'intuition géométrique a rarement raison et dans lequel aucun résultat n'est gratuit.

Si la géométrie convexe s'est aujourd'hui quelque peu émancipée des idées et intuitions géométriques de ses débuts, il est cependant indéniable qu'une bonne compréhension de ces dernières est fondamentale pour bien appréhender le sujet. Ainsi, au-delà des démonstrations du théorème de Steiner dans le plan et de la formule de Crofton, le lecteur est surtout invité à se forger sa propre intuition et à remarquer qu'un certain nombre des arguments utilisés peuvent être généralisés à des dimensions autres que le plan, même si cela nécessite un travail plus approfondi.

Table des matières

1	Pré-requis	2
1.1	Longueur d'une courbe	2
1.2	Convexes compacts et leur bord	7
1.3	Valuation sur un convexe	9
1.4	Paramétrage du bord d'un convexe	14
2	Projection sur un convexe	17
2.1	Théorème de projection	17
2.2	Existence du périmètre	22
2.3	Continuité du périmètre	25
2.4	Théorème de Steiner	31
3	Grassmanniennes affines	38
3.1	Mesure homogène sur les grassmanniennes affines	38
3.1.1	Mesure de Lebesgue sur le demi-cercle	38
3.1.2	Grassmannienne affine	40
3.1.3	Face affine d'un convexe	43
3.1.4	Formule de Crofton - Cas des segments	44
3.1.5	Formule de Crofton - Cas général	47
3.2	Le point de vue des valuations	53
3.3	Application au problème de l'aiguille de Buffon	59
3.3.1	Le cas de la droite réelle	59
3.3.2	Le cas du plan	60
3.3.3	Dans le cas général	61
	Références	62

Notation

Mesure et valuation

$\mathcal{B}(A)$ désigne la tribu borélienne de A

$f_*(\nu)$ désigne la mesure image de ν par f

$\nu \times \rho$ désigne la mesure produit de ρ et ν

λ désigne la mesure de Lebesgue

Vol désigne la mesure de Lebesgue 2-dimensionnelle

Per désigne le périmètre

$\|\gamma\|_{\mathbb{L}_\infty}$ désigne la norme infinie de $\gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ où γ est supposée mesurable.

Topologie

$\overset{\circ}{K}$ désigne l'intérieur de K

\overline{K} désigne l'adhérence de K

∂K désigne la frontière de K

B_r désigne la boule ouverte de \mathbb{R}^2 centrée en l'origine et de rayon r

λK pour $\lambda \geq 0$ désigne l'ensemble $\{\lambda x : x \in K\}$ où K est un sous-ensemble d'un espace vectoriel

$\|x\|$ désigne la norme euclidienne dans \mathbb{R}^n

$\|\gamma\|_\infty$ désigne la norme infinie de $\gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ où γ est supposée continue.

$\text{Conv}(K)$ désigne l'enveloppe convexe de K

Algèbre

$\text{Van}(x_i)$ désigne la matrice de Vandermonde associée à la famille (x_i)

1 Pré-requis

Ce premier chapitre fait office principalement de rappels et a pour but de définir mathématiquement la notion de longueur d'une courbe et de périmètre d'un convexe. Ces notions de nature géométrique sont en fait plus subtiles qu'elles n'y paraissent au premier abord et un certain nombre de résultats deviennent invalides si l'hypothèse de convexité n'est plus vérifiée. La notion de convexité seule n'est d'ailleurs pas suffisante pour espérer obtenir de bonnes propriétés de régularité, il faudra dans de nombreux cas se restreindre à la classe des convexes compacts d'intérieur non vide, ensemble que l'on notera \mathcal{K} dans la suite de ce mémoire.

Enfin, la dernière partie de ce chapitre s'attachera à développer succinctement la notion de valuation. Cette notion revêt d'une importance particulière en géométrie convexe puisqu'elle est à la base du théorème d'Hadwiger, théorème qui, s'il ne sera pas démontré dans ce mémoire, n'en constitue pas moins le fil directeur.

1.1 Longueur d'une courbe

L'idée intuitive pour définir la longueur d'une courbe consiste à découper cette dernière en petites lignes polygonales, ce qui est appelé subdiviser la courbe et à sommer les longueurs de chaque segment en faisant tendre le pas de la subdivision vers 0. Cette idée se formalise mathématiquement de la manière suivante.

Dans la suite, $\sigma = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est dite une subdivision de $[0, 1]$ si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

- (i) La suite (x_i) est strictement croissante ;
- (ii) $x_0 = 0$ et $x_n = 1$.

Enfin, $\tau = (y_i)$ est dite subdivision plus fine de $\sigma = (x_i)$ si τ est elle-même une subdivision de $[0, 1]$ et $\{y_i\} \subset \{x_i\}$. On notera alors $\tau \leq \sigma$.

On est alors en mesure de définir la notion de variation, un premier pas vers la notion de longueur :

Définition 1.1.1

Soit $\sigma = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ une subdivision de $[0, 1]$ et $\gamma : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}^n$. La variation de σ sur γ est définie par :

$$V(\gamma, \sigma) = \sum_{i=1}^n \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|. \quad (1.1)$$

Cette notion vérifie des propriétés intéressantes, notamment vis-à-vis des subdivisions plus fines comme le montre la propriété suivante :

Propriété 1.1.2

Soit $\gamma : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}^n$ et $\tau \leq \sigma$ deux subdivisions. Alors :

$$V(\gamma, \sigma) \leq V(\gamma, \tau). \quad (1.2)$$

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence de l'inégalité triangulaire.

On note $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ (resp. $(y_i)_{0 \leq i \leq m}$) les points associés à la subdivision σ (resp. τ). Comme $\tau \leq \sigma$, il existe une suite strictement croissante $(k_i)_{0 \leq i \leq n}$ telle que $x_i = y_{k_i}$ pour tout i dans $\llbracket 0, n \rrbracket$. D'où :

$$\|x_i - x_{i-1}\| \leq \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} \|y_j - y_{j-1}\| \quad (\text{inégalité triangulaire}).$$

La fin de la preuve s'obtient en sommant les inégalités précédentes. □

Cette dernière propriété traduit en fait une idée de zoom. Le fait de choisir une subdivision plus fine va permettre de mieux appréhender les variations de la courbe localement. Il est donc naturel de définir la longueur d'une courbe comme :

Définition 1.1.3

Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$. On note Σ l'ensemble des subdivisions de $[0, 1]$. γ est dite à variation bornée si :

$$\sup_{\sigma \in \Sigma} V(\gamma, \sigma) < +\infty. \quad (1.3)$$

Si γ est à variation bornée, on définit alors la longueur de γ , notée $\text{Long}(\gamma)$ comme la borne supérieure précédente.

Il apparait alors censé de restreindre l'étude de cette notion à des courbes qui sont *a minima* continues, le cas discontinu n'entrant pas dans le cadre de ce mémoire. Il est de plus légitime de se demander s'il existe des courbes qui sont à variation bornée et des courbes qui ne le sont pas. La réponse est positive dans les deux cas comme le montre les résultats suivants :

Définition 1.1.4

$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite \mathcal{C}_{pm}^1 s'il existe $(t_i)_{0 \leq i \leq n}$ croissante dans $[0, 1]$ telle que :

- (i) γ est continue sur $[0, 1]$;
- (ii) pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, γ est \mathcal{C}^1 sur $]t_{i-1}, t_i[$;
- (iii) γ admet des dérivées à droite et à gauche finies en tout point t_i .

Propriété 1.1.5

Si $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est C_{pm}^1 , alors γ est à variation bornée et :

$$\text{Long}(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt. \quad (1.4)$$

Démonstration. Par définition, on a :

$$\int_{[0,1]} \|\gamma'(t)\| dt = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t)\| dt,$$

où les t_i sont les points de discontinuité de la dérivée.

γ' est continue sauf en ses points de discontinuité où elle admet alors des limites finies à droite et à gauche donc γ' est bornée par $M > 0$. On vérifie alors que γ est M -lipschitzienne par l'inégalité des accroissements finis, ce qui prouve en particulier qu'elle est à variation bornée.

On montre maintenant la seconde partie du théorème. Dans un premier temps, on considère γ de classe \mathcal{C}^1 . On se donne alors $\sigma = (t_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision de $[0, 1]$. On a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| &= \sum_{i=1}^n \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t) dt \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t)\| dt \\ &= \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt \end{aligned}$$

Réciproquement, soit $\varepsilon > 0$. Comme γ est de classe \mathcal{C}^1 , on sait qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\|\gamma'(t) - \gamma'(s)\| \leq \varepsilon$ si $|t - s| \leq \delta$. On se donne alors une subdivision $\sigma = (t_i)_{0 \leq i \leq n}$ dont le pas est inférieur à δ . L'inégalité des accroissements finis fournit alors pour $t_{i-1} \leq t \leq t_i$:

$$\left| \left\| \frac{\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right\| - \|\gamma'(t)\| \right| \leq \varepsilon.$$

En intégrant la relation précédente :

$$\left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\|\gamma'(t)\| - \frac{\|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|}{t_i - t_{i-1}} \right) dt \right| \leq \varepsilon(t_i - t_{i-1}).$$

Enfin, en sommant :

$$\int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt \leq \sum_{i=1}^n \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| + \varepsilon,$$

ce qui termine la preuve dans le cas \mathcal{C}^1 .

Dans le cas général, il suffit de remarquer que si on se donne une subdivision σ de $[0, 1]$, on peut alors sans perte de généralité considérer une subdivision plus fine contenant les points de discontinuité de γ et on se ramène au cas précédent en se restreignant aux intervalles sur lesquels γ est de classe \mathcal{C}^1 . \square

Remarque 1.1.6

Il est possible de généraliser le résultat précédent à des courbes n'étant plus \mathcal{C}_{pm}^1 . Le lecteur pourra à ce loisir consulter [RUDIN, chapitre 7].

La notion de longueur telle qu'elle est définie jusqu'à présent n'est *a priori* pas invariante par reparamétrisation de γ . La propriété précédente permet de remédier à cet oubli :

Propriété 1.1.7

Soit $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ un homéomorphisme et γ à variation bornée. Alors :

$$\text{Long}(\gamma) = \text{Long}(\gamma \circ h). \tag{1.5}$$

Démonstration. h étant un homéomorphisme, h est strictement monotone sur $[0, 1]$. On est donc amené à distinguer deux cas, le cas où h est strictement croissante et le cas où h est strictement décroissante. Dans la suite, seul le cas h strictement croissante sera démontré, la démonstration dans le cas décroissant étant similaire.

Comme h est bijective croissante, on a nécessairement $h(0) = 0$ et $h(1) = 1$. On en déduit alors que (x_i) est une subdivision de $[0, 1]$ si et seulement si $(h(x_i))$ est une subdivision de $[0, 1]$, ce qui par passage à la borne supérieure prouve la propriété demandée. \square

Jusqu'à présent, l'ensemble des courbes étudiées étaient à variation bornée. Cependant, la notion de continuité seule ne permet pas de garantir l'existence d'une longueur finie, l'exemple le plus classique étant l'exemple de la fonction $f : x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{x^2}$ sur $[0, 1]$ prolongée en 0 par 0 qui est bien continue mais dont la variation bornée est $+\infty$.

Démonstration. On considère $x_n = \frac{1}{\sqrt{n\pi + \frac{\pi}{2}}}$. On a alors :

$$\begin{aligned} |f(x_n) - f(x_{n-1})| &= \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}} + \frac{1}{(n-1)\pi + \frac{\pi}{2}} \\ &\underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n\pi}, \end{aligned}$$

terme général d'une série divergente, ce qui conclut la preuve. \square

Cet exemple est d'autant plus problématique que le graphe de f est compact. Il existe donc des parties compactes dans le plan qui sont paramétrables par une courbe continue mais qui n'ont pas de longueur finie. C'est en partie pour remédier à ces pathologies que la notion de convexité va être introduite.

1.2 Convexes compacts et leur bord

Cette partie est consacrée à la définition du périmètre, notion fondamentale en géométrie convexe du plan puisqu'elle intervient tout aussi bien dans le théorème de Steiner que dans la formule de Crofton. *A priori*, il ne paraît pas aberrant de définir le périmètre d'un ensemble comme la longueur d'une courbe qui paramétriserait la frontière de cet ensemble. Cependant, afin d'obtenir une notion qui jouit de bonnes propriétés de régularité, le périmètre ne pourra être défini que pour une certaine classe de convexes.

Définition 1.2.1

Un lacet $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une application continue vérifiant :

- (i) $\gamma(0) = \gamma(1)$;
- (ii) $\gamma(s) = \gamma(t)$ si et seulement si $\{s, t\} = \{0, 1\}$.

Définition 1.2.2

Un lacet γ est dit convexe s'il existe un convexe compact K de \mathbb{R}^n dont ∂K est paramétrée par γ .

Il est maintenant temps d'aborder la notion de périmètre d'un convexe en s'appuyant sur la notion de longueur introduite précédemment.

Définition 1.2.3

Soit K un convexe compact de \mathbb{R}^2 d'intérieur non vide dont le bord est paramétrable par un lacet γ à variation bornée. Alors, le périmètre de K est défini par :

$$\text{Per}(K) = \text{Long}(\gamma). \quad (1.6)$$

Démonstration. Il s'agit de vérifier que la définition précédente ne dépend pas de la paramétrisation choisie, résultat qui découle de la Propriété 1.1.7. \square

Remarque 1.2.4

Le choix de définir le périmètre uniquement sur les ensembles compacts convexes d'intérieur non vide peut *a priori* poser question. Cependant, un convexe compact d'intérieur vide dans le plan est alors nécessairement un segment. En particulier, il n'existe aucune paramétrisation de sa frontière par un lacet convexe. Dans ce cas-là et afin d'éviter tout malentendu, le terme périmètre sera proscrit.

Le périmètre défini précédemment dispose d'un certain nombre de propriétés intéressantes et conformes à l'intuition géométrique. Ainsi, le périmètre d'un polygone convexe est égal à la somme des longueurs de ses côtés, un résultat qui est conforme à l'intuition. Afin de prouver cette dernière affirmation, il suffit de remarquer que le contour d'un polygone convexe d'intérieur non vide est paramétrable par une fonction \mathcal{C}_{pm}^1 qui est localement la paramétrisation d'un segment et de conclure en appliquant la Propriété 1.1.5.

Un dernier exemple fondamental qui servira dans la suite de ce mémoire est l'exemple des boules de rayon $r > 0$ dont on peut vérifier que :

Proposition 1.2.5

B_r est convexe bornée et :

$$\text{Per}(B_r) = 2\pi r. \tag{1.7}$$

Démonstration. Une paramétrisation du cercle de rayon r est donnée par :

$$\gamma : \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto r(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \end{cases}$$

qui est \mathcal{C}^1 . De plus :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \gamma'(t) = 2\pi r(-\sin(2\pi t), \cos(2\pi t)).$$

On en déduit à l'aide de la Propriété 1.1.5 :

$$\begin{aligned} \text{Per}(B_r) &= \int_{[0,1]} \|\gamma'(t)\| dt && \square \\ &= 2\pi r. \end{aligned}$$

Cet exemple illustre aussi une propriété fort intéressante du périmètre. En effet, il fait apparaître le périmètre d'un convexe comme une fonction homogène de degré 1. Plus précisément, pour $r \in \mathbb{R}$ et B_1 la boule unité :

$$\text{Per}(rB_1) = |r| \text{Per}(B_1).$$

Il est alors légitime de se demander si une telle propriété n'est vérifiée que dans le cas des boules fermées de \mathbb{R}^2 , ou si au contraire elle peut être étendue à tout compact convexe d'intérieur non vide. La réponse à cette dernière interrogation est en fait positive comme va le montrer le paragraphe suivant. Plus précisément, le périmètre appartient à une famille de fonctions : les valuations.

1.3 Valuation sur un convexe

Cette partie est donc consacrée à l'introduction des valuations dans le plan. Une valuation peut être vue comme l'analogue d'une mesure à laquelle l'hypothèse de sommabilité dénombrable aurait été remplacée par une hypothèse de sommabilité finie. D'autre part, contrairement à une mesure, une valuation n'est pas définie sur une tribu mais sur l'ensemble \mathcal{K} des compacts convexes d'intérieur non vide. Cette restriction offre certains avantages puisqu'il est possible de munir \mathcal{K} d'une métrique (la distance de Hausdorff) et donc de considérer la continuité d'une valuation.

Dans un premier temps sont rappelées les définitions et propriétés relatives à la distance de Hausdorff. Cette partie de l'exposé est librement inspirée des notes du cours de Magistère dispensé par Dominique Hulin [2].

Dans la suite, la notation \mathcal{H} désignera l'ensemble des compacts non vides du plan.

Définition 1.3.1

Soit $K_1, K_2 \in \mathcal{H}$.

La distance de Hausdorff d_H est définie par :

$$d_H(K_1, K_2) = \max \left(\sup_{k_1 \in K_1} \text{dist}(k_1, K_2), \sup_{k_2 \in K_2} \text{dist}(K_1, k_2) \right). \quad (1.8)$$

d_H est une distance sur \mathcal{H} .

Démonstration. Il suffit de vérifier, que définie comme précédemment, la distance de Hausdorff vérifie bien les axiomes d'une distance.

Soient K_1 et K_2 à distance nulle. K_1 et K_2 étant fermés, il s'en suit que $K_1 \subset K_2$ et $K_2 \subset K_1$, ce qui montre que $K_1 = K_2$. La réciproque est immédiate.

d_H est symétrique en ses variables.

Enfin, il reste à montrer l'inégalité triangulaire. Cette dernière est en fait une conséquence de l'inégalité triangulaire vérifiée par la distance dist . \square

Présentée comme cela, la distance de Hausdorff ne semble guère posséder d'une interprétation géométrique simple. Cependant, le lemme suivant, qui est équivalent à la définition précédente, va permettre de remédier à cet inconvénient. Avant d'introduire ce lemme, la définition de r -voisinage de $K \in \mathcal{K}$ est rappelée :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_r(K) &= \{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, K) < r\} \\ &= \{x + u : x \in K, u \in B_r\} \\ &= K + B_r \end{aligned}$$

Lemme 1.3.2

Soit $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$. La distance de Hausdorff vérifie :

$$d_H(K_1, K_2) = \inf\{r > 0 : K_1 \subset \mathcal{V}_r(K_2), K_2 \subset \mathcal{V}_r(K_1)\} \quad (1.9)$$

Démonstration. On note $d = \inf\{r > 0 : K_1 \subset \mathcal{V}_r(K_2), K_2 \subset \mathcal{V}_r(K_1)\}$.

Soit $d' > d$. Alors, $K_1 \subset \mathcal{V}_{d'}(K_2)$ et $K_2 \subset \mathcal{V}_{d'}(K_1)$ et les deux inéquations suivantes sont donc vérifiées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sup_{k_1 \in K_1} \text{dist}(k_1, K_2) \leq d' \\ \sup_{k_2 \in K_2} \text{dist}(K_1, k_2) \leq d' \end{array} \right.$$

d'où par passage à la limite, $d_H(K_1, K_2) \leq d$.

Soit maintenant $d' < d$. Alors, il existe $x \in K_i$ tel que $\text{dist}(x, K_j) \geq d'$ où $\{i, j\} = \{0, 1\}$. Donc, par passage à la limite :

$$d_H(K_1, K_2) \geq d,$$

ce qui conclut la preuve du lemme. □

Un corollaire immédiat et non sans importance de ce lemme est le suivant :

Corollaire 1.3.3

Si $d_H(K_1, K_2) \leq r$, alors $K_1 \subset (K_2 + B_r)$ et $K_2 \subset (K_1 + B_r)$.

Ce travail préliminaire étant réalisé, il est maintenant possible de définir ce qu'est une valuation :

Définition 1.3.4

Une valuation μ sur \mathcal{K} est une fonction $\mu : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfaisant les 3 propriétés suivantes :

- (i) μ est continue par rapport à la distance de Hausdorff;
- (ii) $\mu(K_1 \cup K_2) + \mu(K_1 \cap K_2) = \mu(K_1) + \mu(K_2)$ pour tout $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ tels que $K_1 \cup K_2 \in \mathcal{K}$ et $K_1 \cap K_2 \in \mathcal{K}$;
- (iii) $\mu(TK) = \mu(K)$ pour toute isométrie directe T et $K \in \mathcal{K}$.

Le point (ii) est aussi appelé formule du crible. Enfin, parmi l'ensemble des valuations du plan, certaines disposent de propriétés particulières. Plus précisément :

Définition 1.3.5

Une valuation est dite de degré $d \in \mathbb{N}$ si elle vérifie la propriété suivante :

- (i) $\mu(rK) = |r|^d \mu(K)$ pour tout $r \in \mathbb{R}$, $K \in \mathcal{K}$.

La première valuation qu'il est possible de construire explicitement et sans grande difficulté est la caractéristique d'Euler $\mu_{2,0}$, valuation de degré 0, définie par :

$$\forall K \in \mathcal{K}, \mu_{2,0}(K) = 1$$

A priori, la caractéristique d'Euler ne présente guère d'intérêt. La suite de ce mémoire, et plus particulièrement le théorème d'Hadwiger, prouvera le contraire.

La caractéristique d'Euler construite, il apparaît maintenant pertinent de se demander s'il existe des valuations non constantes dans le plan. Comme une valuation se comporte *à peu près* comme une mesure, on peut espérer que certaines mesures possédant de bonnes propriétés de régularité sont aussi des valuations. Sur \mathbb{R}^2 , la mesure de Lebesgue 2-dimensionnelle, qui sera notée Vol est invariante par isométrie, homogène de degré 2 et vérifie la formule du crible. Pour qu'elle devienne une valuation dans le plan, il ne manque plus qu'à vérifier qu'elle est continue sur \mathcal{K} , ce qui fera l'objet de la Proposition 2.3.1. On en déduit la proposition suivante :

Proposition 1.3.6

La mesure de Lebesgue 2-dimensionnelle est une valuation sur \mathcal{K} de degré 2. On note cette valuation $\mu_{2,2}$.

Remarque 1.3.7

On peut alors se demander si la continuité de la mesure de Lebesgue est aussi vérifiée sur \mathcal{H} . La réponse à cette question est malheureusement négative et en l'absence de convexité, de nombreux contre-exemples peuvent être trouvés. En voici un :

On définit les compacts $K_n = \{(\frac{k}{n}, \frac{i}{n}) : 0 \leq i, k \leq n\}$.

Alors, $d_H(K_n, [0, 1]^2) \leq \frac{C}{n}$ (où la constante C dépend de la norme initiale choisie) donc $K_n \xrightarrow{+\infty} [0, 1]^2$. Cependant, $\text{Vol}(K_n) = 0$ et $\text{Vol}([0, 1]^2) = 1$, ce qui prouve que la mesure de Lebesgue n'est en général pas continue sur les compacts par rapport à la distance de Hausdorff.

Enfin, il existe une dernière valuation d'intérêt dans le plan : le périmètre.

Proposition 1.3.8

Il existe une valuation positive de degré 1, notée $\mu_{2,1}$ coïncidant avec le périmètre sur l'ensemble des compacts convexes d'intérieur non vide admettant un périmètre fini.

A priori, on pourrait imaginer qu'il puisse exister des compacts convexes d'intérieur non vide n'admettant pas de périmètre fini. Cela sera toutefois démenti dans la suite de ce mémoire. Il en résulte alors directement que $\mu_{2,1}$ est en fait exactement égale au périmètre.

Démonstration. Comme les isométries directes du plan conservent les distances, elles conservent la variation d'une fonction et donc *a fortiori* le périmètre.

D'autre part, si γ est à variation bornée et est une paramétrisation de la frontière d'un convexe compact d'intérieur non vide K , alors pour tout $r \in \mathbb{R}$, $r\gamma$ est une paramétrisation de rK . Cela montre directement que le périmètre est homogène de degré 1.

Il reste deux propriétés à démontrer. La continuité du périmètre est montrée dans la proposition 7.

Enfin, la formule du crible est admise pour le moment. En effet, la démonstration avec les outils dont nous disposons est assez technique. Cependant, une très belle preuve de ce résultat peut être obtenue en construisant le périmètre de manière différente. Le lecteur intéressé pourra consulter la partie sur la formule de Crofton et plus particulièrement la Proposition 3.2.1.

Enfin, avant de conclure cette partie, présentons un théorème fondamental de géométrie convexe : le théorème d'Hadwiger, dont on admettra la démonstration.

Théorème 1.3.9 (Hadwiger)

L'ensemble des valuations du plan forme un espace vectoriel de dimension 3.

Ce théorème possède deux conséquences inattendues qui s'avéreront très utiles dans la suite de ce mémoire.

Corollaire 1.3.10

Les valuations $\mu_{2,0}$, $\mu_{2,1}$ et $\mu_{2,2}$ sont une base échelonnée par le degré des valuations du plan.

Démonstration. En admettant le théorème d'Hadwiger, il suffit de montrer que ces trois valuations forment une famille libre. On considère $\lambda \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\lambda_0\mu_{2,0} + \lambda_1\mu_{2,1} + \lambda_2\mu_{2,2} = 0$$

En évaluant cette expression en B_r et en utilisant l'homogénéité, on obtient :

$$\lambda_0\mu_{2,0}(B_1) + r\lambda_1\mu_{2,1}(B_1) + r^2\lambda_2\mu_{2,2}(B_1) = 0,$$

soit :

$$\lambda_0 + 2\pi r\lambda_1 + \pi r^2\lambda_2 = 0.$$

On conclut alors par la liberté de la famille de fonctions $(1, r, r^2)$ sur \mathbb{R}_+ . \square

Une seconde conséquence, tout aussi intéressante est la suivante :

Corollaire 1.3.11

Toute valuation du plan de degré d a un degré inférieur ou égal à 2 et est proportionnelle à $\mu_{2,d}$.

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence directe du corollaire précédent associé à la liberté de la famille $(r^i)_{i \in \mathbb{N}}$ sur \mathbb{R}_+ . \square

Ce paragraphe se conclut par quelques remarques d'ordre général.

Les valuations telles que présentées dans ce mémoire ont été définies sur l'ensemble \mathcal{K} des compacts convexes d'intérieur non vide. Cependant, ce choix entraîne plusieurs restrictions ou inconvénients et n'est généralement pas le cadre privilégié pour développer cette théorie. Plus généralement, une valuation peut être construite sur l'ensemble des compacts convexes du plan et il est possible de généraliser le théorème d'Hadwiger à cette nouvelle définition. En particulier, cette dernière autorise maintenant à parler du périmètre d'un segment puisque ce dernier est compact convexe.

A priori, la notion de périmètre d'un segment serait confondue avec la longueur de ce dernier. Cependant, il apparaît en fin de compte plus naturel de définir le périmètre d'un segment par le double de sa longueur. En effet, la valuation $\mu_{2,1}$, plus généralement définie sur les convexes compacts, est continue et coïncide avec le périmètre sur \mathcal{K} . Il est d'autre part possible d'approcher le segment considéré par une suite de compacts convexes d'intérieur non vide convergeant au sens de la distance de Hausdorff comme le montre la figure ci-après.

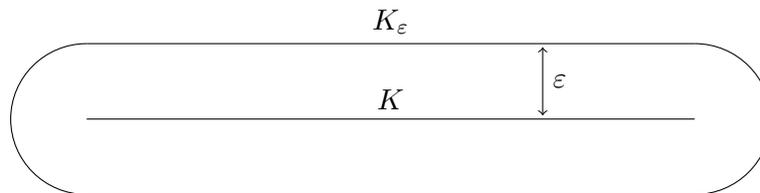


FIGURE 1 – Périmètre vs longueur d'un segment

Puis, avec les notations de la figure et en utilisant la continuité de $\mu_{2,1}$:

$$\begin{aligned} \mu_{2,1}(K) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu_{2,1}(K_\epsilon) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{Per}(K_\epsilon) \\ &= 2 \text{Long}(K) \end{aligned}$$

Le lecteur qui souhaiterait se familiariser un peu plus avec le sujet pourra consulter [KLAIN et ROTA] qui fournit un excellent développement de la théorie des valuations.

1.4 Paramétrage du bord d'un convexe

Le but de cette partie est de démontrer l'existence d'un paramétrage continu du bord d'un convexe compact d'intérieur non vide. Cette partie ne reprend pas les outils précédemment développés mais s'avera très utile pour la suite de ce mémoire.

Quelques résultats intermédiaires sont démontrés dans un premier temps.

Propriété 1.4.1

Si γ est un lacet convexe et Δ une droite de \mathbb{R}^2 , alors γ et Δ s'intersectent soit :

- (i) en au plus deux points ;
- (ii) en une infinité de points. Dans ce cas, Δ et γ coïncident sur un intervalle fermé.

Démonstration. On considère γ un lacet convexe et K le convexe fermé associé. On suppose qu'il existe une droite Δ intersectant γ en plus de trois points. On souhaite alors montrer que γ coïncide avec Δ sur un petit intervalle. On note x_0, x_1, x_2 trois points d'intersection.

Le problème admet des symétries et sans perte de généralité, on peut supposer que Δ est horizontale. On se ramène donc à une suite de points x_0, x_1, x_2 classés par abscisse strictement croissante. Par l'absurde, supposons que Δ ne coïncide pas avec ∂K entre x_0 et x_2 .

Comme le segment $[x_0, x_2]$ appartient par convexité à K et que par hypothèse, il ne coïncide pas avec ∂K , il existe y dans $]x_0, x_2[$ tel que $y \in \overset{\circ}{K}$. Il existe donc B une boule au voisinage de y incluse dans K . On en déduit l'existence de deux points y_1 et y_2 dans K tels que y_1 (resp. y_2) soit d'ordonnée positive (resp. négative).

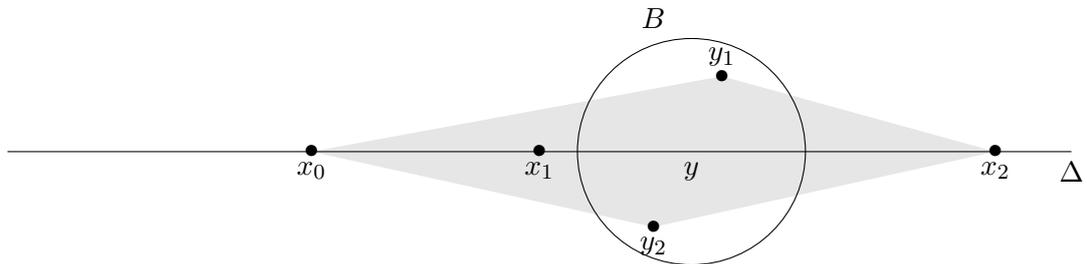


FIGURE 2 – Intersection d'une droite Δ et d'un convexe K

Puis, on remarque que x_1 appartient à l'intérieur du quadrilatère $P = \text{Conv}(x_0, y_1, x_2, y_2)$. Or P est inclus dans K par convexité, ce qui contredit le fait que $x_1 \in \partial K$. Le résultat demandé est donc prouvé. \square

Il est maintenant possible de démontrer le résultat mentionné dans l'introduction :

Théorème 1.4.2

Tout compact convexe d'intérieur non vide admet une frontière paramétrable par une fonction continue.

Démonstration. On considère x_0 un point intérieur de K compact convexe d'intérieur non vide. Quitte à translater K , on peut supposer que x_0 est centré en l'origine.

On note θ un angle entre 0 et 2π et $\vec{u}_\theta = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ le vecteur unitaire porté par θ . La demi-droite positive $\lambda \in \mathbb{R}_+ \mapsto \lambda\vec{u}_\theta$ intersecte alors ∂K en au moins un point différent de l'origine. Supposons que ce point d'intersection ne soit pas unique et notons $y_0 = \lambda_0\vec{u}_\theta$ et $y_1 = \lambda_1\vec{u}_\theta$ deux points d'intersection avec ∂K . Comme x_0 est un point intérieur, on en déduit que λ_0, λ_1 sont tous deux strictement positifs. De même, en adoptant le même raisonnement à la demi-droite négative portée par \vec{u}_θ , on en déduit l'existence de $y_2 = \lambda_2\vec{u}_\theta$ dans ∂K où $\lambda_2 < 0$. La famille (y_0, y_1, y_2) forme alors une famille de trois points alignés sur la frontière de K . Donc d'après la propriété 1.4.1, le segment $[y_0, y_2]$ est contenu dans la frontière de K . Or, $x_0 \in [y_0, y_2]$, donc *a fortiori* $x_0 \in \partial K$, ce qui est absurde. Le point d'intersection est donc unique et dans la suite, il sera noté $\gamma(\theta) = \lambda(\theta)\vec{u}_\theta$.

L'unicité de $\gamma(\theta)$ prouve en particulier que si $\nu > \lambda(\theta)$, alors $\nu\vec{u}_\theta \notin K$.

On montre maintenant que γ restreinte à $[0, 2\pi[$ est bijective.

L'injectivité de γ se déduit du fait que $x_0 = (0, 0)$ est intérieur à K et que deux demi-droites issues de l'origine et ayant des vecteurs directeurs distincts ne peuvent se croiser qu'en x_0 qui n'appartient pas à la frontière.

Quant à la surjectivité, si on se donne $x \in \partial K$, alors la demi-droite partant de x_0 et passant par x est portée par un vecteur \vec{u}_θ . Or, cette demi-droite s'intersecte en un unique point avec ∂K , donc $\gamma(\theta) = x$.

Ceci prouve donc que γ est un lacet convexe.

Il reste donc à prouver la continuité de γ . Par l'absurde, considérons un point θ en lequel γ ne serait pas continue. Alors, il existe une suite de points $(\theta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tendant vers θ telle que :

$$\|\gamma(\theta_i) - \gamma(\theta)\| \geq \varepsilon. \tag{1.10}$$

Comme (\vec{u}_{θ_i}) converge vers \vec{u}_θ , on en déduit que $(\lambda(\theta_i))$ ne converge pas vers $\lambda(\theta)$. Il existe alors $\delta > 0$ et une sous-suite τ de $(\lambda(\theta_i))$ telle que :

$$|\lambda(\theta_{\tau(i)}) - \lambda(\theta)| \geq \delta.$$

La suite $(\lambda(\theta_{\tau(i)}))$ est bornée car K est lui-même borné. On considère alors une valeur d'adhérence $\bar{\lambda}$. Par passage à la limite, $|\lambda(\theta) - \bar{\lambda}| \geq \delta$. D'autre part, comme ∂K est fermé, $\bar{\lambda}\vec{u}_\theta \in \partial K$, ce qui contredit l'unicité de $\lambda(\theta)$. La fonction γ est donc continue, ce qui conclut la preuve. \square

La preuve du théorème précédent montre plus généralement que :

Corollaire 1.4.3

La frontière d'un convexe compact d'intérieur non vide de \mathbb{R}^2 est homéomorphe à ∂B_1 .

Enfin, dans la suite, on notera $\gamma_K(\theta) = \lambda_K(\theta)\vec{u}_\theta$ la paramétrisation angulaire construite dans le théorème précédent.

2 Projection sur un convexe

Cette partie du mémoire vise à rappeler un théorème fondamental en géométrie convexe, le théorème de projection sur un convexe fermé. Ce résultat s'avérera particulièrement utile dans la démonstration du théorème de Steiner, le premier résultat de géométrie convexe pure qui sera obtenu dans ce mémoire. Au-delà du théorème de Steiner, le théorème de projection sur un convexe servira à prouver que tout compact convexe d'intérieur non vide possède un périmètre fini.

2.1 Théorème de projection

La partie suivante fait office de rappel sur le théorème de projection sur un convexe et est inspirée des notes du cours d'analyse hilbertienne dispensé par M. Duval [4].

Proposition 2.1.1

Soit C un convexe fermé non vide de \mathbb{R}^n et $x \in \mathbb{R}^n$. Alors, il existe un unique point $p_C(x) \in C$ tel que :

$$\text{dist}(C, x) = \text{dist}(p_C(x), x). \quad (2.1)$$

Démonstration. La démonstration de cette proposition repose sur l'identité du parallélogramme valable dans un espace euclidien quelconque :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

On fixe maintenant x dans \mathbb{R}^n . On considère une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de C telle que :

$$\text{dist}(x_n, x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \text{dist}(C, x).$$

\mathbb{R}^n étant complet et C étant fermé, la convergence de la suite (x_n) équivaut à ce qu'elle soit de Cauchy. Soit $p, q \geq 0$:

$$\begin{aligned} \|x_p - x_q\|^2 &= 2\|x_p - x\|^2 + 2\|x_q - x\|^2 - \|x_p + x_q - 2x\|^2 \\ &= 2\|x_p - x\|^2 + 2\|x_q - x\|^2 - 4 \left\| \frac{x_p + x_q}{2} - x \right\|^2 \\ &\leq 2\|x_p - x\|^2 + 2\|x_q - x\|^2 - 4 \text{dist}(C, x)^2 \quad (\text{par convexité}). \end{aligned}$$

Donc, comme $\|x_n - x\| \rightarrow \text{dist}(C, x)$, on en déduit que (x_n) est de Cauchy et converge donc vers une valeur que l'on note $p_C(x)$.

Il reste à montrer que cette valeur est unique.

Soit y_0, y_1 deux valeurs vérifiant la propriété demandée. Alors, $z = \frac{1}{2}(y_0 + y_1)$ appartient par convexité à C et vérifie :

$$\begin{aligned} \|z - x\| &\leq \frac{1}{2}(\|x - y_0\| + \|x - y_1\|) \\ &= \text{dist}(C, x). \end{aligned}$$

Donc :

$$\|x - z\| = \text{dist}(C, x)$$

Enfin, en appliquant l'identité du parallélogramme :

$$\begin{aligned} \|y_1 - y_0\|^2 &\leq 2(\|x - y_0\|^2 + \|x - y_1\|^2) - 4\|x - z\|^2 \\ &= 0 \end{aligned} \quad \square$$

ce qui prouve l'unicité.

L'existence et l'unicité de cette projection permettent d'obtenir des résultats géométriques particulièrement intéressants qui sont présentés ci-après :

Lemme 2.1.2

Soit C un convexe du plan.

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, il existe un unique $z \in C$ tel que :

$$\forall y \in C, \langle x - z | y - z \rangle \leq 0. \quad (2.2)$$

De plus, on a l'égalité suivante :

$$z = p_C(x). \quad (2.3)$$

Démonstration. On fixe x dans \mathbb{R}^n et on montre dans un premier temps que $p_C(x)$ vérifie la conclusion du lemme . Pour $y \in C$ et pour $\lambda \in [0, 1]$, on définit $x_\lambda = (1 - \lambda)p_C(x) + \lambda y$. Par convexité, $x_\lambda \in C$. D'où :

$$\|x - x_\lambda\|^2 \geq \|x - p_C(x)\|^2.$$

D'autre part, en développant l'expression précédente, on obtient :

$$\|x - x_\lambda\|^2 = \|x - p_C(x)\|^2 + 2\lambda \langle x - p_C(x) | p_C(x) - y \rangle + \lambda^2 \|p_C(x) - y\|^2,$$

soit, finalement :

$$0 \leq 2\lambda \langle x - p_C(x) | p_C(x) - y \rangle + \lambda^2 \|p_C(x) - y\|^2.$$

Donc, en calculant un équivalent au voisinage de $\lambda = 0$,

$$\langle x - p_C(x) | y - p_C(x) \rangle \leq 0.$$

On montre maintenant l'unicité. Soit z_1 et z_2 vérifiant la conclusion du lemme. Alors :

$$\begin{cases} \langle x - z_1 | z_2 - z_1 \rangle \leq 0 \\ \langle z_2 - x | z_2 - z_1 \rangle \leq 0 \end{cases}$$

d'où en sommant les deux inégalités :

$$\|z_1 - z_2\|^2 \leq 0,$$

ce qui conclut la preuve. \square

Enfin, un corollaire fondamental à cette proposition est le suivant :

Corollaire 2.1.3

L'application p_C est 1-lipschitzienne.

Démonstration. Soit x, y dans \mathbb{R}^n . Alors :

$$\begin{cases} \langle x - p_C(x) | p_C(y) - p_C(x) \rangle \leq 0 \\ \langle y - p_C(y) | p_C(x) - p_C(y) \rangle \leq 0 \end{cases}$$

Donc en sommant les deux inégalités :

$$\langle x - y | p_C(x) - p_C(y) \rangle \geq \|p_C(x) - p_C(y)\|^2 \geq 0.$$

Puis, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\langle x - y | p_C(x) - p_C(y) \rangle \leq \|p_C(x) - p_C(y)\| \|x - y\|.$$

En combinant les deux précédentes inégalités, on obtient la condition de Lipschitz. \square

Hormis ces propriétés démontrées précédemment, le théorème de projection sur un convexe dispose d'une interprétation géométrique qu'il serait dommage de ne pas mentionner. La fin de ce chapitre est donc dédiée à cette interprétation, qui s'avérera particulièrement utile au moment de démontrer le théorème de Steiner. Le lecteur doit cependant être averti que la partie qui suit est au demeurant plutôt informelle et qu'aucune affirmation présentée ne sera prouvée.

Avant toute chose, rappelons la définition d'un hyperplan tangent :

Définition 2.1.4

Une droite affine H est tangente au convexe C en $x \in \partial C$ si :

- (i) $x \in H$;

(ii) $C \subset H^+$ ou $C \subset H^-$,

où H^+ et H^- désignent les deux demi-plans fermés situés de part et d'autre de la droite H .

Soit z un point de la frontière de C . On s'intéresse à l'ensemble des points du plan dont la projection sur C est z , c'est-à-dire l'ensemble $p_C^{-1}(\{z\})$. Le Lemme 2.1.2 montre que pour tout $y \in C$ et $x \in p_C^{-1}(\{z\})$:

$$\langle x - z | y - z \rangle \leq 0.$$

Cette dernière inéquation n'est ni plus ni moins qu'une inéquation affine et s'interprète alors en termes d'hyperplan tangent. Ainsi, si H est un hyperplan tangent à C en z (cf Figure 3), alors la demi-droite Δ perpendiculaire à H , d'origine z et incluse dans le demi-plan ne contenant pas C (la demi-droite bleue sur la figure) vérifie l'inéquation précédente et est donc en particulier incluse dans $p_C^{-1}(z)$.

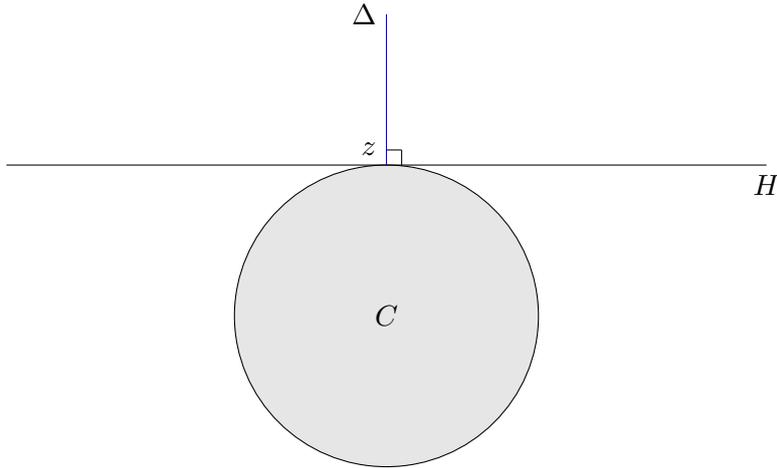


FIGURE 3 – Plan tangent et projection sur un convexe

Cette idée est fondamentale dans la démonstration du théorème de Steiner. En effet, la preuve dudit théorème se ramène à étudier un ε -épaissement d'un polygone convexe P , c'est-à-dire l'ensemble $P + B_\varepsilon$.

En notant $E = (P + B_\varepsilon) \setminus P$, E peut être partitionné selon la projection de ses éléments sur ∂P . Plus précisément, on va distinguer les éléments de E qui se projettent sur un sommet du polygone des éléments de E qui se projettent sur un point régulier de ∂P .

Dans le cas d'un sommet s de ∂P , la situation peut être représentée par la Figure 4. En reprenant les notations de la figure, le cône D engendré par les demi-droites Δ_1 et Δ_2 (en bleu sur la figure) correspond à l'ensemble des

points du plan qui ont pour projeté sur P le sommet s . En intersectant D avec la boule de rayon ε centrée en s , on obtient alors un secteur angulaire qui correspond exactement aux points de E dont le projeté est s .

De même, au voisinage d'un point $p \in \partial P$ régulier, la situation est semblable à celle décrite par la Figure 5. L'ensemble des points du plan se projetant sur p est exactement égal à la demi-droite Δ_3 (en bleue sur la figure). Les points de E qui se projettent sur p correspondent alors à l'intersection de Δ_3 avec la boule de rayon ε centrée en p , c'est-à-dire l'ensemble des points de la demi-droite Δ_3 situés à une distance inférieure à ε de p .

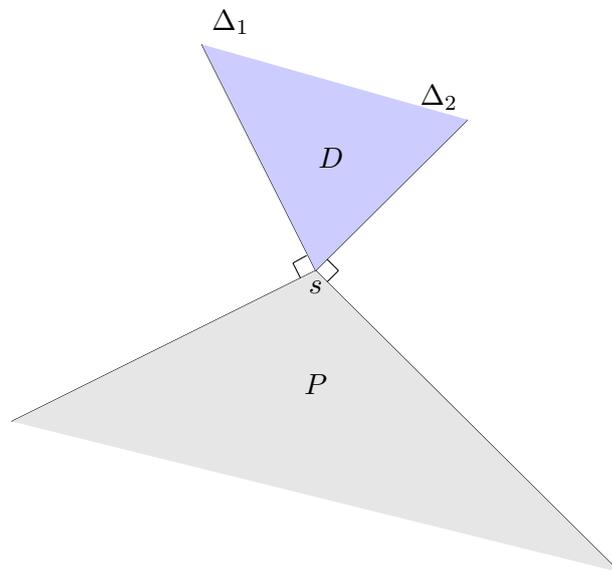


FIGURE 4 – Plan tangent et projection au voisinage d'un sommet

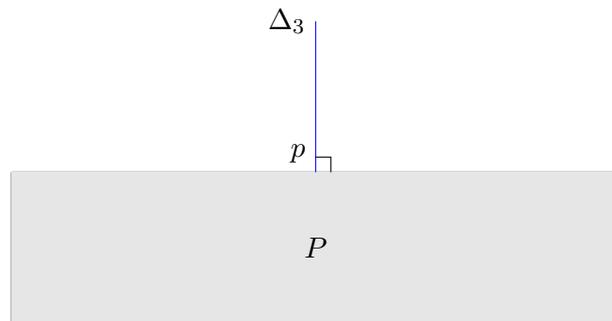


FIGURE 5 – Plan tangent et projection au voisinage d'un point régulier

2.2 Existence du périmètre

On peut déduire de l'interprétation géométrique de la projection sur un convexe une très belle conséquence qui concerne l'existence d'un périmètre fini pour tout compact convexe d'intérieur non vide, théorème qui est l'objet de la partie suivante. Afin de démontrer ce théorème, il est nécessaire dans un premier temps de prouver quelques résultats préliminaires :

Lemme 2.2.1

Soit C un convexe fermé de \mathbb{R}^n . Soit $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overset{\circ}{C}$. Alors, $p_C(x) \in \partial C$.

Démonstration. Distinguons deux cas.

Si $x \in \partial C$, alors le résultat est immédiat.

Sinon, considérons $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overset{\circ}{C}$ et supposons que $p_C(x)$ soit atteint dans $\overset{\circ}{C}$. Il existe donc une boule B centrée en $p_C(x)$ et contenue dans C . Le segment joignant x à $p_C(x)$ intersecte ∂B en un unique point y et on vérifie alors que $y \in C$ (car C est fermé) et que la distance de y à x est strictement inférieure à celle de x à $p_C(x)$, ce qui est absurde. \square

Le lemme précédent montre plus généralement que si $K_0 \subset K_1$ sont deux convexes compacts d'intérieur non vide, alors $p_{K_0}(\partial K_1) \subset \partial K_0$. La frontière de K_1 est donc projetée sur celle de K_0 .

Ce résultat, à l'allure quelque peu anodine, est en fait à la base de la démonstration de l'existence d'un périmètre fini. En effet, l'application projection sur un convexe est 1-lipschitzienne et rétracte donc les distances dans le plan. Le périmètre étant homogène à une longueur, il est tout naturel de penser que lui-aussi va se rétracter sous l'action d'une projection, ce qui permettrait en particulier de montrer que $\text{Per}(K_0) \leq \text{Per}(K_1)$. La suite de cette partie est donc consacrée à la démonstration de cette proposition dont il découlera alors immédiatement le théorème énoncé en introduction.

Lemme 2.2.2

Soient P un polygone convexe d'intérieur non vide dont les sommets sont notés (x_i) et $K \in \mathcal{K}$. On suppose que $P \subset K$.

Alors, quitte à réordonner les sommets (x_i) , il existe une famille croissante (t_i) de $[0, 2\pi]$ telle que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$p_P(\gamma_K(t_i)) = x_i. \quad (2.4)$$

Remarque 2.2.3

Le lemme précédent a une interprétation géométrique simple (cf Figure 6). Si P est un polygone convexe non dégénéré de sommets (x_i) , inclus dans un convexe K , il est possible de choisir de manière ordonnée une suite de

points (y_i) sur la frontière de K de telle sorte que ces points se projettent sur chaque sommet dudit polygone.

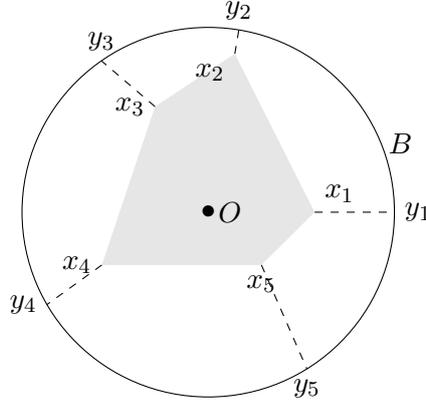


FIGURE 6 – Projection d'un disque sur la frontière d'un convexe

Démonstration. Le lemme précédent est en fait une simple reformulation de l'interprétation géométrique de la projection sur un convexe. En effet, l'ensemble des points du plan se projetant sur le sommet x_i est définie par l'enveloppe conique de deux demi-droites issues de ce même sommet.

Il reste alors à remarquer que ce cône rencontre la frontière du convexe K et qu'en un tel point de rencontre, les conditions de l'énoncé sont vérifiées.

Quant à la monotonie de cette suite de points, elle est admise. \square

Il est maintenant possible de démontrer la proposition suivante :

Proposition 2.2.4

Soient $K_0, K_1 \in \mathcal{K}$ vérifiant :

- (i) $K_0 \subset K_1$;
- (ii) K_1 est de périmètre fini.

Alors, K_0 est de périmètre fini et :

$$\text{Per}(K_0) \leq \text{Per}(K_1).$$

Démonstration. On considère $\sigma = (t_i)$ une subdivision de $[0, 2\pi]$ et on note P le polygone convexe de sommets $\gamma_{K_0}(t_i)$. Alors, d'après le lemme précédent, il existe une suite croissante (s_i) de $[0, 2\pi]$ telle que :

$$p_P(\gamma_{K_1}(s_i)) = \gamma_{K_0}(t_i).$$

D'après le Corollaire 2.1.3, p_P est 1-lipschitzienne, d'où :

$$\text{Per}(P) = \sum_{i=1}^n \|\gamma_{K_0}(t_i) - \gamma_{K_0}(t_{i-1})\| \leq \sum_{i=1}^n \|\gamma_{K_1}(s_i) - \gamma_{K_1}(s_{i-1})\|.$$

Soit, par passage à la borne supérieure :

$$\text{Per}(P) \leq \text{Per}(K_1).$$

On en déduit finalement en passant à la borne supérieure sur les polygones convexes inscrits dans K_0 que :

$$\text{Per}(K_0) \leq \text{Per}(K_1) \quad \square$$

La proposition précédente permet de démontrer le théorème énoncé en début de partie :

Théorème 2.2.5

Soit $K \in \mathcal{K}$. Alors, K a un périmètre fini.

Démonstration. Il suffit de remarquer que tout compact convexe d'intérieur non vide est inclus dans une boule suffisamment grande. Le théorème précédent permet de conclure en remarquant que toute boule a un périmètre fini. □

De même, le résultat suivant est vérifié :

Corollaire 2.2.6

Si $K_0 \subset K_1$ sont deux compacts convexes d'intérieur non vide, alors :

$$\text{Per}(K_0) \leq \text{Per}(K_1) \quad (2.5)$$

2.3 Continuité du périmètre

Cette partie est consacrée à la démonstration de la continuité du périmètre sur \mathcal{K} , une démonstration qui avait été laissée en suspens au moment de prouver que le périmètre était une valuation.

Théorème 2.3.1

L'application périmètre est continue sur \mathcal{K} .

Par translation, il suffit de montrer le théorème pour un compact convexe K contenant le point $(0, 0)$ dans son intérieur.

On rappelle alors qu'il existe une paramétrisation angulaire de ∂K ayant pour point de référence le point $(0, 0)$. On note cette paramétrisation $\gamma_K(\theta) = \lambda_K(\theta)\vec{u}_\theta$.

Le premier point de la démonstration consiste à montrer que si $H \in \mathcal{K}$ est suffisamment proche de K au sens de la distance de Hausdorff, alors $(0, 0) \in \overset{\circ}{H}$. Il sera alors légitime de considérer la paramétrisation angulaire de ∂H par rapport à l'origine puisque H possèdera $(0, 0)$ comme point intérieur. Cette paramétrisation sera notée dans la suite de cette partie $\gamma_H(\theta) = \lambda_H(\theta)\vec{u}_\theta$.

Lemme 2.3.2

Soit $K \in \mathcal{K}$ tel que $(0, 0) \in \overset{\circ}{K}$. Alors, il existe $r > 0$ et $\delta > 0$ tels que $B_r \subset K$ et pour tout $H \in \mathcal{K}$:

$$d_H(K, H) < \delta \implies B_r \subset H. \quad (2.6)$$

Démonstration. Il existe un rayon $r > 0$ tel que B_r est incluse dans K . Quitte à diminuer r , on peut supposer qu'il existe un carré C contenant strictement B_r et contenu dans K . On peut alors s'aider de la Figure 7 :

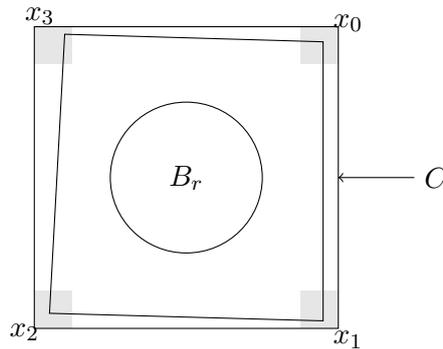


FIGURE 7 – Point intérieur et distance de Hausdorff

Soit δ suffisamment petit et H tel que $d_H(K, H) < \delta$. Alors $K \subset H + B_\delta$, donc H contient nécessairement un point dans chaque carré grisé et on note

x_0, x_1, x_2, x_3 de tels points. Par convexité de H , $\text{Conv}(x_i) \subset H$. Or, B_r est incluse dans $\text{Conv}(x_i)$ donc *a fortiori* dans H , ce qui conclut la preuve. \square

Dans la suite, $K \in \mathcal{K}$ est fixé et contient $(0, 0)$ comme point intérieur. Soit alors r et δ tels que donnés par le lemme précédent et \mathcal{U} le δ -voisinage de K . Il est alors légitime, en vertu du lemme précédent de considérer l'application :

$$H \rightarrow \lambda_H$$

Cette application est en fait continue en H . Plus précisément :

Proposition 2.3.3

L'application

$$\begin{cases} (\mathcal{U}, d_H) & \rightarrow ([0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^+, \|\cdot\|_{+\infty}) \\ H & \mapsto \lambda_H \end{cases} \quad (2.7)$$

est continue en H . Elle est de plus localement lipschitzienne.

Démonstration. La proposition se démontre en plusieurs étapes.

- Etape 1 : Il existe $C > 0$ tel que :

$$d_H(H, K) \leq \delta \implies \|\lambda_H\|_{+\infty} \leq C.$$

Démonstration. L'application λ_K est bornée car K est borné.

Alors, $M = \max \lambda_K$ vérifie :

$$K \subset \overline{B_M}.$$

Or, $H \subset K + B_\delta$, donc *a fortiori* :

$$H \subset \overline{B_M} + B_\delta = B_{M+\delta}.$$

On en déduit donc que :

$$d_H(H, K) \leq \delta \implies \|\lambda_H\|_{+\infty} \leq M + \delta,$$

ce qui conclut l'étape 1. \square

Soit $H \in \mathcal{U}$ tel que $d_H(K, H) < \varepsilon$ où $\varepsilon < r$.

On fixe un angle $\theta \in [0, 2\pi]$ et on suppose dans un premier temps que $\lambda_H(\theta) \geq \lambda_K(\theta)$. On considère alors la Figure 8.

La demi-droite Δ issue de l'origine et de vecteur directeur \vec{u}_θ intersecte ∂K en un unique point $\gamma_K(\theta) = \lambda_K(\theta)\vec{u}_\theta$ où $\lambda_K(\theta) \geq r$. On considère alors la droite perpendiculaire à Δ passant par l'origine. Cette droite intersecte B_r en deux points x_0 et x_1 . On trace alors la demi-droite Δ_0 (*resp.* Δ_1) issue de x_0 (*resp.* x_1) passant par $\gamma_K(\theta)$. L'intersection de ces demi-droites forme deux cônes C_0 et C_1 .

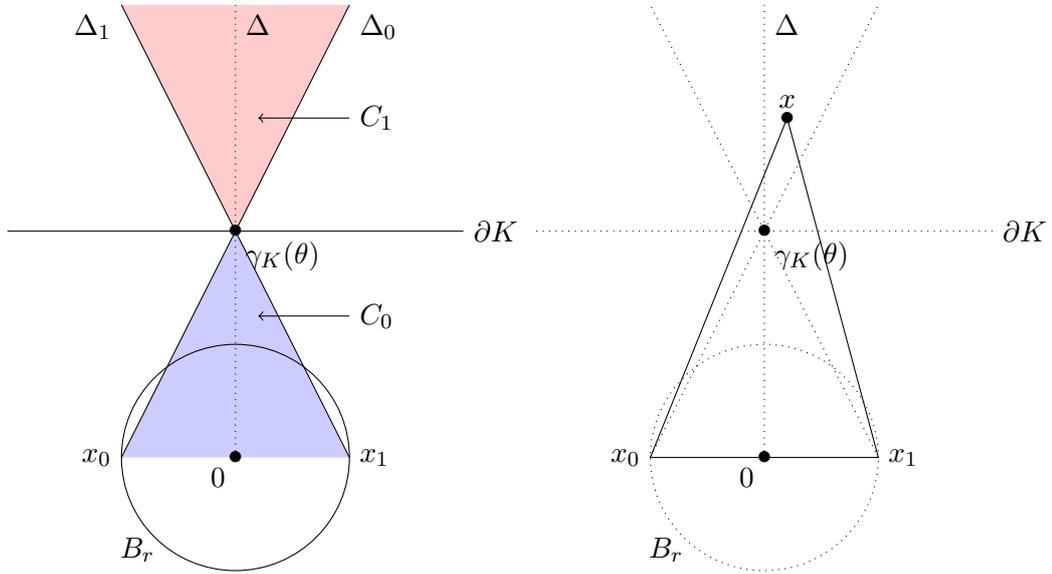


FIGURE 8 –

FIGURE 9 –

- Etape 2 : L'intérieur du cône C_1 ne rencontre pas K .

Démonstration. On suppose qu'il existe $x \in K \cap \overset{\circ}{C}_1$. Alors, $\text{Conv}(x_0, x_1, x)$ est inclus par convexité dans K . La Figure 9 permet alors de se convaincre que $\gamma_K(\theta)$ est strictement inclus dans l'intérieur du triangle de sommets x_0, x_1, x , qui par convexité est contenu dans K . Cela contredit le fait que $\gamma_K(\theta)$ appartienne à la frontière de K . Absurde. On en déduit donc :

$$\overset{\circ}{C}_1 \cap \partial K = \emptyset,$$

ce qui termine la démonstration de l'étape 2. \square

- Etape 3 : L'application $H \mapsto \lambda_H$ est continue.

Démonstration. Appuyons une fois encore notre raisonnement sur une figure (cf Figure 10).

On cherche à démontrer sous l'hypothèse $\lambda_H(\theta) \geq \lambda_K(\theta)$ le résultat suivant :

$$\lambda_H(\theta) - \lambda_K(\theta) \leq d_\theta.$$

Par construction, le cône D vérifie :

$$D + B_\varepsilon \subset \overset{\circ}{C}_1$$

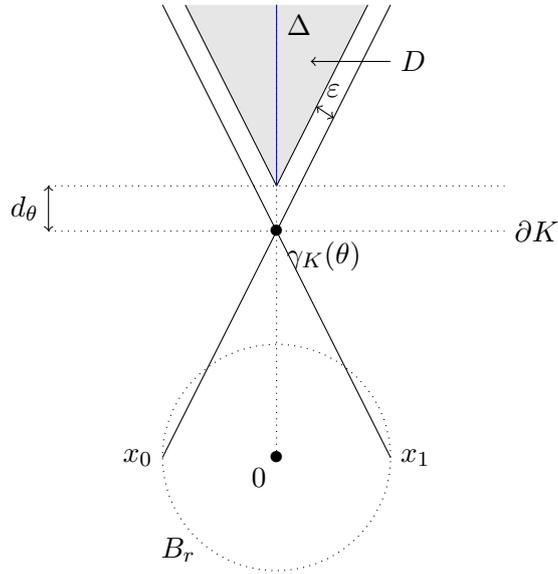


FIGURE 10 –

Par l'absurde, si $\lambda_H(\theta) - \lambda_K(\theta) > d_\theta$, alors $\gamma_H(\theta)\vec{u}_\theta$ est situé sur le segment bleu dans D .

D'autre part, $H \subset K + B_\epsilon$, donc il existe un point $x \in K$ tel que $\gamma_H(\theta)\vec{u}_\theta \in B(x, \epsilon)$. On en déduit alors :

$$x \in \{\gamma_H(\theta)\vec{u}_\theta\} + B_\epsilon,$$

ce qui en particulier implique que $x \in D + B_\epsilon \subset \mathring{C}_1$. Or $K \cap \mathring{C}_1 = \emptyset$, ce qui contredit le résultat précédent.

Donc :

$$\lambda_H(\theta) - \lambda_K(\theta) \leq d_\theta.$$

Il reste maintenant à estimer la distance d_θ , en espérant que cette dernière soit petite.

On note α_θ l'angle $\angle x_0\gamma_K(\theta)\vec{u}_\theta x_1$. L'angle α_θ est donc compris entre 0 et π . De plus, d_θ est reliée à α_θ par la relation suivante :

$$d_\theta = \frac{\epsilon}{\sin(\frac{\alpha_\theta}{2})}.$$

d_θ reste donc petit si α_θ ne se rapproche pas trop de 0.

Or, d'après l'étape 1, λ_K est majoré par une constante C . On en déduit donc qu'il existe un angle $\alpha > 0$ ne dépendant que de C et r vérifiant $\alpha_\theta \geq \alpha$ pour

tout θ . Donc, en particulier :

$$\begin{aligned} d_\theta &= \frac{\varepsilon}{\sin\left(\frac{\alpha\theta}{2}\right)} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}, \end{aligned}$$

qui fournit alors une majoration indépendante de θ . \square

Enfin, dans le cas où $\lambda_K(\theta) \geq \lambda_H(\theta)$, l'idée est de réappliquer la même démonstration que précédemment en échangeant les rôles de K et H pour obtenir la même majoration. Le point essentiel de cette démonstration est alors de remarquer que α ne dépend pas de H , mais seulement de r , K et δ .

On a donc finalement montré que pour tout $\varepsilon < r$:

$$d_H(K, H) \leq \varepsilon \implies \|\lambda_K - \lambda_H\|_{+\infty} \leq \frac{\varepsilon}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)},$$

ce qui prouve la continuité demandée. \square

Il est maintenant temps de démontrer le théorème énoncé dans l'introduction.

Proposition 2.3.4

L'application périmètre est continue en K .

Démonstration. On considère $\varepsilon > 0$. D'après la proposition précédente, il existe un voisinage \mathcal{V} de K tel que pour tout $H \in \mathcal{V}$:

$$\begin{cases} \|\lambda_K - \lambda_H\|_{+\infty} \leq \varepsilon \\ B_r \subset H \end{cases}$$

On pose :

$$s = \frac{\varepsilon}{r}$$

et on montre que :

$$(1 - s)H \subset K \subset (1 + s)H$$

Soit $\theta \in [0, 2\pi]$.

Comme $B_r \subset H$, on en déduit que $\lambda_H(\theta) \geq r$. Donc

$$\begin{aligned} (1 - s)\lambda_H(\theta) &= (\lambda_H(\theta) - \lambda_K(\theta)) - s\lambda_H(\theta) + \lambda_K(\theta) \\ &\leq \|\lambda_K - \lambda_H\|_{+\infty} - sr + \lambda_K(\theta) \\ &\leq \lambda_K(\theta) \end{aligned}$$

ce qui montre que $(1 - s)H \subset K$.

Il est possible de montrer de manière similaire que $K \subset (1 + s)H$.

Finalement, on en déduit par croissance du périmètre que :

$$(1 - s) \operatorname{Per}(H) \leq \operatorname{Per}(K) \leq (1 + s) \operatorname{Per}(H), \quad (2.8)$$

soit :

$$|\operatorname{Per}(K) - \operatorname{Per}(H)| \leq s \leq \frac{\varepsilon}{r},$$

ce qui conclut la preuve. \square

Le lecteur pourra remarquer que cette démonstration s'adapte sans difficulté à la continuité de la mesure de Lebesgue. En effet on a une propriété de croissance : si $K_0 \subset K_1$ alors $\operatorname{Vol}(K_0) \leq \operatorname{Vol}(K_1)$. Donc, en remplaçant l'équation (2.8) par

$$(1 - s)^2 \operatorname{Vol}(H) \leq \operatorname{Vol}(K) \leq (1 + s)^2 \operatorname{Vol}(H),$$

on montre :

Proposition 2.3.5

L'application $\operatorname{Vol} : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.

2.4 Théorème de Steiner

Le but de ce chapitre est de démontrer le théorème de Steiner, un des théorèmes fondamentaux de la géométrie convexe. On notera Vol la mesure de Lebesgue 2-dimensionnelle. Avant de démontrer ce résultat, rappelons quelques définitions :

Définition 2.4.1

Soit E un \mathbb{R} espace vectoriel et $A, B \subset E$. La somme de Minkowski de A et B est définie par :

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}. \quad (2.9)$$

Dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^2 , le r -épaississement de A est défini :

$$\begin{aligned} A + rB_1 &= \{a + rb : a \in A, b \in \overline{B_1}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^2 : d(x, A) \leq r\} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Avant de présenter le théorème de Steiner, qui permet de relier les différentes valuations présentées ci-avant, étudions un exemple. Soit un r -épaississement de la boule unité. On se convainc à l'aide d'un dessin que $B_1 + rB_1 = (1 + r)B_1$. Puis, le volume étant une valuation d'ordre 2, il en résulte que :

$$\begin{aligned} \text{Vol}(B_1 + rB_1) &= (1 + r)^2 \text{Vol}(B_1) \\ &= \pi r^2 + 2\pi r + \pi \end{aligned}$$

Le volume d'un r -épaississement est donc dans le cas de la boule unité un polynôme en r . Cet exemple n'est en fait qu'un cas particulier du théorème de Steiner qui s'énonce ainsi :

Théorème 2.4.2 (Steiner)

Pour tout convexe K dans \mathcal{K} , l'application

$$r \mapsto \text{Vol}(K + B_r)$$

est un polynôme de degré 2 à coefficients positifs.

Démonstration. On prouve dans un premier temps le théorème pour un polygone convexe.

Soit P un polygone convexe à n côtés (c_i) de longueurs respectives (l_i) et de sommets (s_i).

On note $E = (P + B_r) \setminus P$ la contribution du r -épaississement à P . Le théorème de projection sur un convexe nous permet alors de séparer les contributions à E en distinguant les éléments qui se projettent sur les sommets du polygone des éléments qui se projettent sur les côtés de P , hors sommet :

$$E = \left(\bigcup_{i=1}^n p_P^{-1}(s_i) \cap E \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^n p_P^{-1}(c_i) \cap E \right)$$

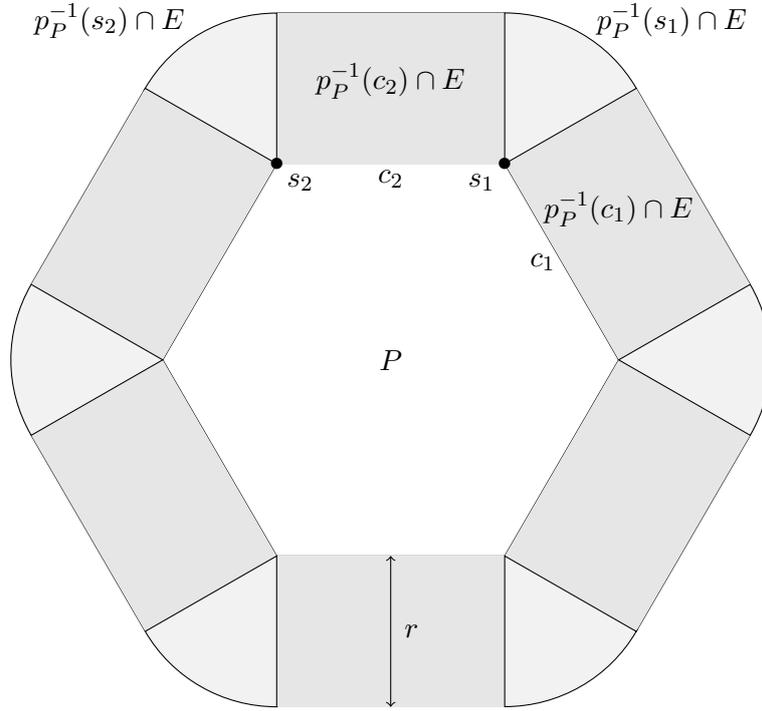


FIGURE 11 – Découpage de l'épaissement E (en grisé) du convexe P

Comme l'union est disjointe :

$$\text{Vol}(P + B_r) = \text{Vol}(P) + \text{Vol} \left(\bigcup_{i=1}^n p_P^{-1}(s_i) \cap E \right) + \text{Vol} \left(\bigcup_{i=1}^n p_P^{-1}(c_i) \cap E \right).$$

Or :

$$\begin{aligned} \text{Vol} \left(\bigcup_{i=1}^n p_P^{-1}(c_i) \cap E \right) &= \sum_{i=1}^n \text{Vol} (p_P^{-1}(c_i) \cap E) \\ &= \sum_{i=1}^n r l_i \\ &= r \sum_{i=1}^n l_i \end{aligned}$$

De plus, en notant θ_i l'angle formé par la portion de disque $p_P^{-1}(s_i) \cap E$ pour

tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned} \text{Vol} \left(\bigcup_{i=1}^n p^{-1}(s_i) \cap E \right) &= \sum_{i=1}^n \text{Vol} (p^{-1}(s_i) \cap E) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} r^2 \theta_i \\ &= \pi r^2, \end{aligned}$$

en remarquant que la somme des θ_i vaut 2π .

Le résultat est donc démontré pour un polygone convexe.

Soit maintenant K un convexe de \mathcal{K} .

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polygone K_ε inscrit dans K tel que $K \subset K_\varepsilon + B_\varepsilon$.

Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $r > 0$:

$$\text{Vol}(K_\varepsilon + B_r) \leq \text{Vol}(K + B_r) \leq \text{Vol}(K_\varepsilon + B_{\varepsilon+r}).$$

Or, par continuité du volume :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{Vol}(K_\varepsilon + B_r) = \text{Vol}(K + B_r).$$

Considérons maintenant $r_0 < r_1 < r_2$ des réels.

L'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto (P(r_0), P(r_1), P(r_2)) \end{cases}$$

est une application linéaire, qui exprimée dans la base canonique a pour matrice de représentation :

$$\text{Van}(r_0, r_1, r_2) = \begin{pmatrix} 1 & r_0 & r_0^2 \\ 1 & r_1 & r_1^2 \\ 1 & r_2 & r_2^2 \end{pmatrix}$$

On reconnaît alors une matrice de Vandermonde dont les coefficients r_i sont deux à deux distincts. On en déduit que φ est inversible. Donc l'application réciproque est elle aussi continue car linéaire dans un espace de dimension finie.

Pour tout $\varepsilon > 0$, on note $P_\varepsilon = \sum_{i=0}^2 \mu_{2-i}(\varepsilon) X^i$ le polynôme de degré 2 qui évalué en $r > 0$ donne $\text{Vol}(K_\varepsilon + B_r)$.

En se servant du résultat admis précédemment, on obtient de plus :

$$\forall i \in \{0, 1, 2\}, P_\varepsilon(r_i) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \text{Vol}(K + B_{r_i}).$$

En tant que combinaison linéaire des $(P_\varepsilon(r_i))$, les coefficients $\mu_i(\varepsilon)$ de P_ε convergent lorsque ε tend vers 0. On note μ_i leurs limites, telles que

$$\forall i \in \{0, 1, 2\}, \mu_i(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_i.$$

Par passage à la limite, les μ_i sont positifs. De plus, pour tout $r > 0$,

$$\begin{aligned} \text{Vol}(K + B_r) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{Vol}(K_\varepsilon + B_r) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{i=0}^2 \mu_{2-i}(\varepsilon) r^i \\ &= \sum_{i=0}^2 \mu_{2-i} r^i \end{aligned}$$

Donc $r \mapsto \text{Vol}(K + B_r)$ est un polynôme de degré 2 à coefficients positifs. \square

Le théorème de Steiner est donc prouvé.

Pour tout convexe K dans \mathcal{K} , on note alors $\mu_{2-i}(K)$ le coefficient de r^i dans la fonction polynomiale $r \mapsto \text{Vol}(K + B_r)$. On peut compléter le théorème en montrant que les applications

$$\mu_i : \begin{cases} \mathcal{K} & \rightarrow \mathbb{R} \\ K & \mapsto \mu_i(K) \end{cases}$$

sont des valuations du plan :

Théorème 2.4.3

Pour tout $i \in \{0, 1, 2\}$ l'application $\mu_i : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ est une valuation de degré i .

Pour démontrer ce théorème on aura besoin du lemme suivant :

Lemme 2.4.4

Soient K_1, K_2 des convexes de \mathcal{K} tels que $K_1 \cup K_2 \in \mathcal{K}$ et $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$.

Si $x_1 \in K_1$ et $x_2 \in K_2$ alors

$$[x_1, x_2] \cap (K_1 \cap K_2) \neq \emptyset.$$

Démonstration. Soient K_1, K_2 des convexes de \mathcal{K} vérifiant les hypothèses et $x_1 \in K_1$ et $x_2 \in K_2$.

Comme $K_1 \cup K_2$ est convexe, $[x_1, x_2]$ est inclus dans $K_1 \cup K_2$.

Notons $F_1 := [x_1, x_2] \cap K_1$ et $F_2 := [x_1, x_2] \cap K_2$.

F_1 et F_2 sont fermés, car K_1 et K_2 le sont, et non vides, car $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$.

$F_1 \cup F_2 = [x_1, x_2]$ car $[x_1, x_2] \subset K_1 \cup K_2$.

Si $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, alors on a une partition de $[x_1, x_2]$ en deux fermés non vides. Cela contredit la connexité de $[x_1, x_2]$.

Donc $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$ \square

Démontrons maintenant le Théorème 2.4.3.

Démonstration. Soit K un convexe. On note :

$$\sum_{i=0}^2 \mu_{2-i}(K)X^i$$

le polynôme qui évalué en $r > 0$ donne $\text{Vol}(K + B_r)$.

- Le théorème de Steiner a permis de montrer les coefficients $\mu_i(K)$ sont positifs.
- Par continuité du volume et l'inversibilité de φ , en appliquant le raisonnement utilisé dans la démonstration du théorème de Steiner pour montrer que $\text{Vol}(K + B_r)$ est approché par $\text{Vol}(K_\varepsilon + B_r)$ lorsque K_ε approche K , on a la continuité de $K \mapsto \mu_i(K)$ pour tout $i \in \{0, 1, 2\}$.
- Soient K_1 et K_2 des convexes de \mathcal{K} tels que $K_1 \cup K_2 \in \mathcal{K}$ et $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$. Pour tout $r > 0$

$$\begin{aligned} \text{Vol}((K_1 \cup K_2) + rB_0) &= \text{Vol}((K_1 + B_r) \cup (K_2 + B_r)) \\ &= \text{Vol}(K_1 + B_r) + \text{Vol}(K_2 + B_r) - \text{Vol}((K_1 + B_r) \cap (K_2 + B_r)) \\ &= \text{Vol}(K_1 + B_r) + \text{Vol}(K_2 + B_r) - \text{Vol}((K_1 \cap K_2) + B_r). \end{aligned}$$

Justifions l'égalité $\text{Vol}((K_1 + B_r) \cap (K_2 + B_r)) = \text{Vol}((K_1 \cap K_2) + B_r)$:

D'une part on a l'inclusion $(K_1 \cap K_2) + B_r \subset (K_1 + B_r) \cap (K_2 + B_r)$. En effet si un point de \mathbb{R}^2 est à distance inférieure à r d'un point de $K_1 \cap K_2$ alors il est à distance inférieure à r d'un point de K_1 et d'un point de K_2 .

D'autre part si $x_0 \in (K_1 + B_r) \cap (K_2 + B_r)$ alors il existe $x_1 \in K_1$ et $x_2 \in K_2$ tels que $d(x_0, x_1) \leq r$ et $d(x_0, x_2) \leq r$.

Or, pour tout x dans le segment $[x_1, x_2]$ on a $d(x_0, x) \leq r$. De plus, d'après le Lemme 6, il existe un $x \in [x_1, x_2] \cap (K_1 \cap K_2)$. Donc il existe un élément de $K_1 \cap K_2$ à distance inférieure à r de x_0 . Donc $x_0 \in (K_1 \cap K_2) + B_r$.

Finalement, comme $K_1, K_2, K_1 \cup K_2$ et $K_1 \cap K_2$ sont des convexes de \mathcal{K} , le théorème de Steiner donne l'égalité des polynômes suivants :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^2 \mu_{2-i}(K_1 \cup K_2)X^i &= \sum_{i=0}^2 \mu_{2-i}(K_1)X^i + \sum_{i=0}^2 \mu_{2-i}(K_2)X^i - \sum_{i=0}^2 \mu_{2-i}(K_1 \cap K_2)X^i \\ &= \sum_{i=0}^2 (\mu_{2-i}(K_1) + \mu_{2-i}(K_2) - \mu_{2-i}(K_1 \cap K_2))X^i. \end{aligned}$$

Donc :

$$\forall i \in \{0, 1, 2\}, \mu_i(K_1 \cup K_2) = \mu_i(K_1) + \mu_i(K_2) - \mu_i(K_1 \cap K_2).$$

- Par invariance par isométrie directe du volume, on a l'invariance par isométrie directe de $\mu_i(K)$ pour tout $i \in \{0, 1, 2\}$.

On a ainsi montré que μ_i est une valuation pour tout $i \in \{0, 1, 2\}$.

Il reste finalement à montrer que pour tout $i \in \{0, 1, 2\}$, μ_i est de degré i .

Soit K un convexe. Soit $\lambda > 0$.

Pour tout $r > 0$

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\lambda K + r B_0) &= \lambda^2 \text{Vol}\left(K + \frac{r}{\lambda} B_0\right) \\ &= \lambda^2 \sum_{i=0}^2 \mu_{2-i}(K) \left(\frac{r}{\lambda}\right)^i \\ &= \sum_{i=0}^2 \lambda^{2-i} \mu_{2-i}(K) r^i. \end{aligned}$$

Donc

$$\forall i \in \{0, 1, 2\}, \mu_i(\lambda K) = \lambda^i \mu_i(K) \quad \square$$

Remarque 2.4.5

Le théorème d'Hadwiger évoqué dans la première partie de cet ouvrage permet de définir avec exactitude les valuations μ_i . Notons par ailleurs que cela a déjà été fait au cours de la démonstration du théorème de Steiner pour les polygones convexes uniquement. Le Corollaire 1.3.11 montre qu'il existe une relation de proportionnalité entre μ_i et $\mu_{2,i}$ pour tout $i \in \{0, 1, 2\}$. L'exemple traité au début de ce paragraphe va nous permettre d'expliciter les coefficients de proportionnalité c_i tels que $c_i \mu_{2,i} = \mu_i$.

- $\mu_0(B_1) = \pi$ or

$$\begin{aligned} \mu_0(B_1) &= c_0 \mu_{2,0}(B_1) \\ &= c_0. \end{aligned}$$

Donc $c_0 = \pi$ et pour tout K convexe de \mathcal{K} ,

$$\mu_0(K) = \pi.$$

- $\mu_1(B_1) = 2\pi$ or

$$\begin{aligned} \mu_1(B_1) &= c_1 \mu_{2,1}(B_1) \\ &= c_1 \text{Per}(B_1) \\ &= c_1 2\pi. \end{aligned}$$

Donc $c_1 = 1$ et pour tout K convexe de \mathcal{K} ,

$$\mu_1(K) = \text{Per}(K).$$

- $\mu_2(B_1) = \pi$ or

$$\begin{aligned}\mu_2(B_1) &= c_2 \mu_{2,2}(B_1) \\ &= c_2 \text{Vol}(B_1) \\ &= c_2 \pi.\end{aligned}$$

Donc $c_2 = 1$ et pour tout K convexe de \mathcal{K} ,

$$\mu_2(K) = \text{Vol}(K).$$

Ajoutons pour finir que le raisonnement suivi dans ce paragraphe se généralise sans peine pour démontrer le théorème dans le cas des convexes non-vides de \mathbb{R}^n avec $n \in \mathbb{N}^*$.

3 Grassmanniennes affines

Ce chapitre propose de construire explicitement une valuation dans le plan de degré 1. Le lecteur attentif pourra alors légitimement questionner l'intérêt d'une telle construction puisque le théorème d'Hadwiger montre que si une telle valuation existe, alors elle est nécessairement proportionnelle au périmètre dont la construction a été présentée précédemment. Trois arguments peuvent être opposés. Primo, le théorème d'Hadwiger n'est pas démontré dans le corps de ce mémoire, et est seulement admis. Secondo, la construction suivante permet de donner une très belle interprétation géométrique et quelque peu probabiliste du périmètre d'un convexe compact d'intérieur non vide. Enfin, alors qu'il est difficile d'étendre la construction du périmètre à \mathbb{R}^n , la construction suivante est généralisable à des dimensions supérieures et permet de construire de nouvelles valuations. C'est donc un outil de choix dans l'étude de la géométrie convexe.

3.1 Mesure homogène sur les grassmanniennes affines

La partie suivante propose donc de construire une valuation et de montrer, sans utiliser le théorème d'Hadwiger, qu'elle est proportionnelle au périmètre. Afin de la construire, il est nécessaire de développer quelques résultats qui sont présentés ci-après.

3.1.1 Mesure de Lebesgue sur le demi-cercle

Dans cette partie est construite une mesure de probabilité sur le demi-cercle $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$, invariante par rotation. On pourra par la suite identifier cette mesure à la mesure de Lebesgue renormalisée sur $[0, \pi[$.

On considère dans la suite l'espace mesuré $([0, \pi[, \mathcal{B}([0, \pi]), \lambda)$.

Soit l'application :

$$T : \begin{cases} [0, \pi[& \rightarrow \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z} \\ x & \mapsto x \pmod{\pi} \end{cases} \quad (3.1)$$

On note $\mathcal{A} = T(\mathcal{B}([0, \pi[))$.

Définition 3.1.1

On définit la rotation d'angle $\alpha \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ par :

$$R_\alpha : \begin{cases} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z} & \rightarrow \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z} \\ x & \mapsto x + \alpha \pmod{\pi} \end{cases} \quad (3.2)$$

Il est temps de définir une mesure invariante. La construction de cette mesure est précisée par la proposition suivante :

Proposition 3.1.2

$\nu = T_*(\lambda)$ est l'unique mesure sur \mathcal{A} vérifiant les deux propriétés suivantes :

- (i) $\forall a \leq b \in [0, \pi[, \nu(T(]a, b]) = (b - a)$
- (ii) ν est invariante par rotation

Démonstration. (i) est une conséquence directe de la définition de la mesure image.

Soit maintenant R_α une rotation. On définit $\nu_\alpha = R_{\alpha*}(\nu)$.

La famille $T(]a, b])_{a \leq b \in [0, \pi[}$ est une classe monotone engendrant \mathcal{A} sur laquelle ν et ν_α coïncident. Donc, par le lemme de classe monotone, on en déduit que $\nu = \nu_\alpha$ sur \mathcal{A} , ce qui prouve (ii).

Plus généralement, (i) combiné au lemme de classe monotone fournit l'unicité de ν . □

Dans la suite de ce mémoire, on confondra ν avec la mesure de Lebesgue sur $[0, \pi[$. De plus, quitte à renormaliser par π , on supposera que ν est une mesure de probabilité.

3.1.2 Grassmannienne affine

La partie suivante a pour but de définir la grassmannienne affine $\text{Grass}(2, 1)$, c'est-à-dire l'ensemble des droites affines du plan de \mathbb{R}^2 et de munir cet ensemble d'une mesure qui est invariante par isométrie directe.

Une droite Δ de $\text{Grass}(2, 1)$ est identifiée par un unique couple (θ, r) dans $[0, \pi[\times \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\Delta = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^2 : \text{Det}(\vec{u}_\theta, \vec{y}) = r\} \quad \text{où } \vec{u}_\theta = (\cos(\theta), \sin(\theta)) \quad (3.3)$$

Dans la suite, on sera amené à étudier l'application suivante :

$$\Lambda : \begin{cases} [0, \pi[\times \mathbb{R} & \rightarrow \text{Grass}(2, 1) \\ (\theta, r) & \mapsto \{\vec{y} \in \mathbb{R}^2 : \text{Det}(\vec{u}_\theta, \vec{y}) = r\} \end{cases} \quad (3.4)$$

Cette application identifie $\text{Grass}(2, 1)$ à l'ensemble $[0, \pi[\times \mathbb{R}$.

Remarque 3.1.3

On identifie ici $[0, \pi[$ avec $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$. Tous les calculs par la suite seront donc réalisés modulo π . On munit de plus $[0, \pi[$ de la mesure ν construite précédemment. On notera dorénavant $d\nu = \frac{1}{\pi}d\theta$.

Remarque 3.1.4

Une droite $\Delta \in \text{Grass}(2, 1)$ se décompose en une partie affine linéaire portée par le vecteur unitaire \vec{u}_θ et une translation dépendant du paramètre r .

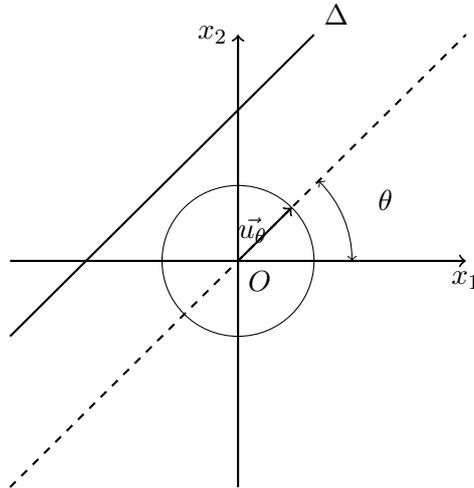


FIGURE 12 – Interprétation géométrique de la Grassmannienne

Le travail réalisé jusqu'à présent a permis de construire une paramétrisation des droites du plan. Cette dernière possède en fait de nombreux attributs.

En effet, des transformations géométriques usuelles telles que les isométries vont pouvoir s'exprimer de manière naturelle dans ce nouveau cadre. Les résultats qui suivent sont donnés pour les isométries directes seulement.

Avant d'énoncer ces résultats, il est rappelé que les isométries directes du plan sont engendrées par les translations et les rotations, une propriété qui servira abondamment dans la suite de ce mémoire.

Proposition 3.1.5

On considère $\Delta = \Lambda(\theta, r)$ une droite affine du plan.

La rotation d'angle $\alpha \in [0, \pi[$, notée $R_\alpha(\Delta)$ vérifie :

$$R_\alpha(\Delta) = \Lambda(\theta + \alpha, r). \quad (3.5)$$

La translation de vecteur $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$, notée $T_{\vec{a}}(\Delta)$ vérifie :

$$T_{\vec{a}}(\Delta) = \Lambda(\theta, \text{Det}(\vec{u}_\theta, \vec{a}) + r). \quad (3.6)$$

Démonstration. La propriété sur les rotations est une conséquence directe de la définition de Λ . On montre maintenant le résultat pour une translation de vecteur \vec{a} :

$$\begin{aligned} T_{\vec{a}}(\Delta) &= \{\vec{y} + \vec{a} \in \mathbb{R}^2 : \text{Det}(\vec{u}_\theta, \vec{y}) = r\} \\ &= \{\vec{y} \in \mathbb{R}^2 : \text{Det}(\vec{u}_\theta, \vec{y} - \vec{a}) = r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^2 : \text{Det}(\vec{u}_\theta, \vec{y}) = \text{Det}(\vec{u}_\theta, \vec{a}) + r\} \\ &= \Lambda(\theta, \text{Det}(\vec{u}_\theta, \vec{a}) + r), \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. □

Il est maintenant temps de définir une mesure sur $\text{Grass}(2, 1)$. Les mesures λ et ν étant σ -finies, il est légitime de considérer la mesure produit $d\nu \times d\lambda$. On définit alors $\lambda_{2,1}$ comme la mesure image de $d\nu \times d\lambda$ par Λ , c'est-à-dire :

$$\lambda_{2,1} = \Lambda_*(d\nu \times d\lambda). \quad (3.7)$$

$\lambda_{2,1}$ est alors une mesure sur $\text{Grass}(2, 1)$ munie de sa tribu image.

La suite de cette partie va maintenant consister à montrer que la mesure $\lambda_{2,1}$ est bien invariante par isométrie directe. Cette propriété va en fait découler tout naturellement de l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue et de la mesure ν construite précédemment.

Théorème 3.1.6

$\lambda_{2,1}$ est une mesure invariante par isométrie directe.

Démonstration. Il suffit de montrer le résultat pour les rotations et les translations car ces dernières engendrent l'ensemble des isométries directes.

On montre dans un premier temps l'invariance par rotation. Soit α dans $[0, \pi[$. Alors, en notant $f(\Delta) = F(\Lambda(r, \theta))$, on a pour f intégrable :

$$\begin{aligned}
 \int_{\text{Grass}(2,1)} f \circ R_\alpha(\Delta) d\lambda_{2,1}(\Delta) &= \int_{[0,\pi[\times \mathbb{R}} F(\theta + \alpha, r) d\nu(\theta) d\lambda(r) \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{[0,\pi[} F(\theta + \alpha, r) d\theta dr \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{[0,\pi[} F(\theta, r) d\theta dr \quad (\text{d'après la Proposition 3.1.2}) \\
 &= \int_{\text{Grass}(2,1)} f(\Delta) d\lambda_{2,1}(\Delta)
 \end{aligned}$$

On montre le résultat pour les translations.

$$\begin{aligned}
 \int_{\text{Grass}(2,1)} f \circ T_{\vec{a}}(\Delta) d\lambda_{2,1}(\Delta) &= \frac{1}{\pi} \int_{[0,\pi[\times \mathbb{R}} F(\theta, \text{Det}(\vec{u}_\theta, \vec{a}) + r) d\nu(\theta) d\lambda(r) \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{[0,\pi[} \int_{\mathbb{R}} F(\theta, \text{Det}(\vec{u}_\theta, \vec{a}) + r) dr d\theta \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{[0,\pi[} \int_{\mathbb{R}} F(\theta, r) dr d\theta \quad (\text{par invariance de la mesure de Lebesgue}) \\
 &= \int_{\text{Grass}(2,1)} f(\Delta) d\lambda_{2,1}(\Delta)
 \end{aligned}$$

ce qui prouve le théorème. □

3.1.3 Face affine d'un convexe

Ce paragraphe est un court intermède sur les convexes et présente une notion qui nous sera utile dans la partie suivante :

Définition 3.1.7

Soit γ un lacet convexe et K le convexe associé. On dit que I intervalle non vide ouvert de $[0, 1]$ est un côté affine de K si γ est affine sur I . On peut alors considérer l'intervalle ouvert maximal contenant I sur lequel γ est affine.

Proposition 3.1.8

Soit γ une courbe convexe. Alors γ admet un nombre au plus dénombrable de côtés affines maximaux.

Démonstration. On remarque que si on se donne J_1, J_2 deux côtés affines maximaux, alors $J_1 = J_2$ ou $J_1 \cap J_2 = \emptyset$. Donc deux côtés affines maximaux non égaux sont disjoints. Comme chaque côté affine contient l'image d'un paramètre rationnel, on en déduit qu'il existe une injection de l'ensemble des côtés affines de γ dans \mathbb{Q} , ce qui conclut. \square

3.1.4 Formule de Crofton - Cas des segments

Le paragraphe suivant permet d'entrer dans le coeur du sujet et vise à démontrer la formule de Crofton dans le cas des segments. Cette formule établit un lien fondamental entre le *nombre moyen de droites* intersectant un segment et la longueur de ce dernier. Mieux encore, il sera possible de prolonger cette formule à une classe d'ensembles plus large que celles des segments. A l'issue de cette construction, la formule de Crofton permettra alors d'obtenir ou de ré-obtenir un certain nombre de résultats plus ou moins délicats à démontrer si on ne dispose pas de cet outil.

La suite de la partie consiste à formaliser l'idée de *nombre moyen de droites* intersectant un segment.

Définition 3.1.9

Soit Γ l'ensemble des courbes $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ continues.

Pour γ dans Γ , on définit alors l'application :

$$X_\gamma : \begin{cases} \text{Grass}(2, 1) & \rightarrow \mathbb{N} \cup +\infty \\ \Delta & \mapsto \text{Card}\{t \in [0, 1] : \gamma(t) \in \Delta\} \end{cases} \quad (3.8)$$

L'application définie précédemment vérifie alors :

Propriété 3.1.10

L'application X_γ vérifie les propriétés suivantes :

- (i) si $\|X_\gamma\|_{\mathbb{L}^\infty} < +\infty$ alors X_γ est intégrable.
- (ii) si γ est un lacet convexe, alors X_γ est intégrable.

Démonstration. γ étant continue, $\gamma([0, 1])$ est une partie compacte de \mathbb{R}^2 , donc bornée. De plus, l'équation d'une droite de \mathbb{R}^2 est donnée par :

$$\Delta = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^2 : \text{Det}(\vec{u}_\theta, \vec{y}) = r\}.$$

Toute droite $\Delta = \Lambda(\theta, r)$ intersectant $\gamma(t)$ vérifie alors :

$$\text{Det}(\vec{u}_\theta, \gamma(t)) = r.$$

L'application $(\theta, t) \mapsto \text{Det}(\vec{u}_\theta, \gamma(t))$ étant continue sur le compact $[0, \pi] \times [0, 1]$, on en déduit que r prend ses valeurs dans un compact $K \subset \mathbb{R}$. On a donc finalement montré que :

$$\Delta = \Lambda(\theta, r) \text{ intersecte } \gamma \implies (\theta, r) \in [0, \pi[\times K,$$

ce dernier ensemble étant de mesure finie.

On peut donc maintenant conclure :

$$\begin{aligned} \int_{\text{Grass}(2,1)} X_\gamma(\Delta) d\lambda_{2,1}(\Delta) &\leq \frac{1}{\pi} \|X_\gamma\|_\infty \int_{[0,\pi] \times \mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,\pi] \times K}(\theta, r) d(\theta, r) \\ &< \|X_\gamma\|_{\mathbb{L}_\infty} \lambda(K). \end{aligned}$$

ce qui prouve la propriété (i).

La propriété (ii) se déduit de (i). En effet, soit γ une courbe convexe. γ est alors injective sur $[0, 1[$ et vérifie $\gamma_0 = \gamma_1$. D'où :

$$\begin{aligned} \text{Card}\{t \in [0, 1] : \gamma(t) \in \Delta\} &\leq \text{Card}\{\gamma([0, 1]) \cap \Delta\} + 1 \\ &= \text{Card}\{\partial K \cap \Delta\} + 1 \end{aligned}$$

Or, d'après la Proposition 1.4.1, le nombre d'intersections entre une droite et la frontière d'un convexe est soit $+\infty$, soit inférieure à 2. Il suffit donc de montrer que l'ensemble des droites intersectant γ en une infinité de points est de mesure nulle. Or, si une droite intersecte γ en une infinité de points, alors γ est localement confondue avec cette droite. γ ne peut admettre qu'au plus un nombre dénombrable de côtés affines d'après la Proposition 3.1.8. On en déduit que l'ensemble des droites intersectant γ en une infinité de points est au plus dénombrable, donc de mesure nulle. On a donc montré :

$$\|X_\gamma\|_{\mathbb{L}_\infty} \leq 2. \quad \square$$

Le lemme suivant est un lemme technique qui s'avéra utile de nombreuses dans la suite de ce mémoire.

Lemme 3.1.11

Soit γ une courbe de \mathbb{R}^2 . Soit I une isométrie directe. Alors :

$$\int_{\text{Grass}(2,1)} X_\gamma(\Delta) d\lambda_{2,1}(\Delta) = \int_{\text{Grass}(2,1)} X_{I(\gamma)}(\Delta) d\lambda_{2,1}(\Delta). \quad (3.9)$$

Démonstration. On note I une isométrie directe. On rappelle que I^{-1} est aussi une isométrie directe. Alors :

$$\begin{aligned} \int_{\text{Grass}(2,1)} X_\gamma(\Delta) d\lambda_{2,1}(\Delta) &= \int_{\text{Grass}(2,1)} X_\gamma \circ I^{-1}(\Delta) d\lambda_{2,1}(\Delta) \quad (\text{invariance par isométrie}) \\ &= \int_{\text{Grass}(2,1)} \text{Card}\{t \in [0, 1] : \gamma(t) \in I^{-1}(\Delta)\} d\lambda_{2,1}(\Delta) \\ &= \int_{\text{Grass}(2,1)} \text{Card}\{t \in [0, 1] : I \circ \gamma(t) \in \Delta\} d\lambda_{2,1}(\Delta) \\ &= \int_{\text{Grass}(2,1)} X_{I(\gamma)}(\Delta) d\lambda_{2,1}(\Delta) \end{aligned}$$

Quoique que quelque peu formelle, la démonstration précédente a une interprétation géométrique simple. Le nombre d'intersections de γ avec une droite affine est conservé par isométrie. \square

Il est maintenant temps de prouver la formule de Crofton dans le cadre des segments. Cette formule établit un lien entre l'intégrale précédente et la longueur du segment. Plus précisément :

Proposition 3.1.12

Pour tout segment γ :

$$\int_{\text{Grass}(2,1)} X_\gamma(\Delta) d\lambda_{2,1}(\Delta) = \frac{2}{\pi} \text{Long}(\gamma). \quad (3.10)$$

Démonstration. On est ramené par le lemme précédent à montrer la proposition pour un segment vertical, paramétré par $\gamma(t) = t(L, 0)$ sur $[0, 1]$. Une droite $\Delta = \Lambda(\theta, r)$ de \mathbb{R}^2 intersecte γ en 0 ou 1 point presque sûrement. De plus, la donnée de θ et de ce point d'intersection, que l'on notera $x_0 = t_0(L, 0)$ détermine entièrement Δ puisqu'alors r est donné par $r = \text{Det}(\vec{u}_\theta, x_0) = -t_0 L \sin(\theta)$. On a donc en conséquence :

$$\begin{aligned} \int_{\text{Grass}(2,1)} X_\gamma(\Delta) d\lambda_{2,1}(\Delta) &= \int_{[0,\pi[} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{-L \sin(\theta) \leq r \leq 0}(\theta, r) dr d\theta \\ &= \frac{L}{\pi} \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta \\ &= \frac{2L}{\pi}, \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. \square

3.1.5 Formule de Crofton - Cas général

La formule de Crofton peut être en fait démontrée d'une manière plus probabiliste, ce qui amène à des prolongements intéressants. La première partie de cette section consiste à proposer une preuve alternative de la formule précédente.

Définition 3.1.13

Soit deux courbes γ_1, γ_2 continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R}^n telles que $\gamma_0(1) = \gamma_1(0)$. On définit $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ par :

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases} \quad (3.11)$$

Soit n courbes continues $(\gamma_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $[0, 1]$ dans \mathbb{R}^n vérifiant pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$:

$$\gamma_{i-1}(1) = \gamma_i(0). \quad (3.12)$$

On définit alors par récurrence ;

$$\bigcup_{i=1}^n \gamma_i = \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} \gamma_i \right) \cup \gamma_n. \quad (3.13)$$

Proposition 3.1.14

Soit deux courbes γ_1, γ_2 continues telles que $\gamma_0(1) = \gamma_1(0)$. Alors :

$$X_{\gamma_1 \cup \gamma_2} = X_{\gamma_1} + X_{\gamma_2} \quad \lambda_{2,1}\text{-pp}. \quad (3.14)$$

Plus généralement, pour $(\gamma_i)_{1 \leq i \leq n}$ des courbes vérifiant (3.12), l'égalité suivante est vérifiée :

$$X_\gamma = \sum_{i=1}^n X_{\gamma_i} \quad \lambda_{2,1}\text{-pp}. \quad (3.15)$$

où $\gamma = \bigcup_{i=1}^n \gamma_i$.

Démonstration. On distingue deux cas :

- (i) Si Δ n'intersecte pas γ en $\gamma_1(1)$, alors $X_{\gamma_1 \cup \gamma_2}(\Delta) = X_{\gamma_1}(\Delta) + X_{\gamma_2}(\Delta)$
- (ii) Sinon, $X_{\gamma_1 \cup \gamma_2}(\Delta) = X_{\gamma_1}(\Delta) + X_{\gamma_2}(\Delta) - 1$

On conclut en remarquant que l'ensemble des droites Δ passant par $\gamma_1(1)$ est de mesure nulle.

La seconde partie de l'énoncé se démontre par récurrence. □

La proposition qui arrive ci-après est sans doute la proposition la plus importante de cette partie :

Proposition 3.1.15

On note $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction qui à un segment γ de longueur L associe l'intégrale :

$$\int_{\text{Grass}(2,1)} X_\gamma(\Delta) d\lambda_{2,1}(\Delta). \quad (3.16)$$

f est bien définie, en le sens où elle ne dépend pas du segment choisi.

De plus, l'égalité suivante est vérifiée :

$$\forall x, y \geq 0, f(x+y) = f(x) + f(y). \quad (3.17)$$

Démonstration. f est indépendante du segment choisi d'après le Lemme 3.1.11.

Soit $x, y \geq 0$ et γ un segment de longueur $x+y$. On décompose γ en deux sous-segments γ_1, γ_2 de longueurs respectives x et y . En particulier, $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$. D'où, d'après la proposition précédente :

$$X_\gamma = X_{\gamma_1} + X_{\gamma_2} \quad \lambda_{2,1}\text{-pp.}$$

En intégrant cette relation, on obtient l'égalité demandée. \square

De plus, comme f est positive, la proposition précédente montre qu'elle est croissante.

f vérifie donc l'équation fonctionnelle de Cauchy et est croissante. On est alors en mesure de déterminer entièrement f . Pour cela, on prouve le résultat suivant :

Proposition 3.1.16

Soit $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une application vérifiant :

- (i) $\forall x, y \geq 0, g(x+y) = g(x) + g(y)$;
- (ii) g est croissante.

Alors, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \geq 0, g(x) = Cx. \quad (3.18)$$

Démonstration. g est croissante, donc continue en au moins 1 point. Par linéarité, g est en fait continue sur \mathbb{R}_+ .

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. En raisonnant par récurrence, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$g(nx) = ng(x).$$

Soit $r = \frac{p}{q}$ un rationnel positif. Alors, la suite d'égalités suivante est vérifiée :

$$qg\left(\frac{p}{q}x\right) = g(px) = pg(x).$$

Donc, pour tout $r \geq 0$ rationnel, on a :

$$f(rx) = rx$$

Enfin, \mathbb{Q} étant dense dans \mathbb{R} et g étant continue, l'égalité suivante est vérifiée pour tout $y \geq 0$:

$$g(xy) = g(x)y$$

On conclut la preuve en prenant $x = 1$. □

Finalement, la proposition 3.1.12 est redémontrée :

Proposition 3.1.17

Il existe une constante $C \geq 0$ telle que pour tout $x \geq 0$:

$$f(x) = Cx \tag{3.19}$$

Démonstration. f vérifie donc les hypothèses de la proposition précédente, ce qui prouve l'existence de C . Enfin, la positivité de C découle la positivité de f . □

L'intérêt de la construction précédente est qu'elle se généralise très facilement à un polygone convexe quelconque.

Corollaire 3.1.18

Soit γ une paramétrisation du bord d'un polygone convexe d'intérieur non vide. Alors :

$$\int_{\text{Grass}(2,1)} X_\gamma d\lambda_{2,1} = C \text{Per}(\gamma). \tag{3.20}$$

Démonstration. On considère un polygone P de n côtés. On note γ_i une paramétrisation du i -ème côté de P . Alors, $\gamma = \bigcup_{i=1}^n \gamma_i$ est une paramétrisation de la frontière de P . Le résultat se déduit alors des propositions 3.1.14 et 3.1.17. □

Jusqu'à présent, on a donc montré que pour tout polygone convexe d'intérieur non vide, le nombre moyen d'intersections avec une droite du plan est proportionnel au périmètre. Or, les polygones convexes sont denses dans \mathcal{K} . On peut donc légitimement espérer que la formule de Crofton se généralise à \mathcal{K} . Le théorème permet de confirmer cette intuition :

Théorème 3.1.19 (Formule de Crofton)

Pour tout $K \in \mathcal{K}$:

$$\int_{\text{Grass}(2,1)} X_{\partial K}(y) d\lambda_{2,1}(y) = C \text{Per}(K). \tag{3.21}$$

Dans la suite, on notera $\mu(K)$ la valeur de l'intégrale précédente.

Démonstration. Le problème étant invariant par translation, on se ramène à un compact convexe K dont l'intérieur contient $(0,0)$. On considère alors $\gamma_K(\theta) = \lambda_K(\theta)\vec{u}_\theta$ une paramétrisation angulaire dont le point de référence est l'origine.

Comme $(0,0)$ est un point intérieur, il existe $r > 0$ tel que la boule B_r soit incluse dans K . De plus, comme $\lambda_K(\theta) > r$ pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$ et λ_K est continue, il existe $e > 0$ tel que $\lambda_K \geq e + r$.

Soit $e > \varepsilon > 0$.

On considère $\sigma = (\theta_i)$ une subdivision de $[0, 2\pi]$ vérifiant :

$$\text{Per}(K) - \varepsilon \leq \sum_{i=1}^n \|\gamma_K(\theta_i) - \gamma_K(\theta_{i-1})\| \leq \text{Per}(K).$$

Comme γ_K est continue sur un compact, elle est uniformément continue. Soit $\delta > 0$ tel que :

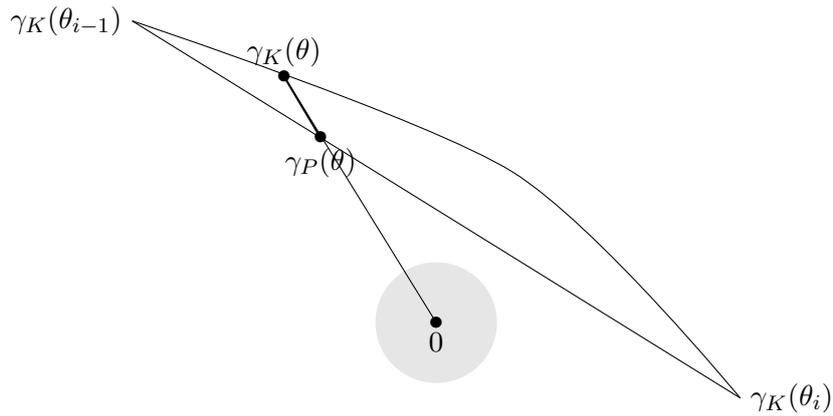
$$\forall \theta^{(0)}, \theta^{(1)} \in [0, 2\pi], |\theta^{(1)} - \theta^{(0)}| \leq \delta \implies \|\gamma_K(\theta^{(1)}) - \gamma_K(\theta^{(0)})\| \leq \varepsilon.$$

Quitte à considérer une subdivision plus fine, on peut donc supposer sans perte de généralité que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |\theta_i - \theta_{i-1}| \leq \delta.$$

Dans un premier temps, on montre que P contient B_r .

On note $\gamma_P(\theta) = \lambda_P(\theta)\vec{u}_\theta$ l'intersection entre la droite portée par \vec{u}_θ et le côté du polygone $[\gamma_K(\theta_{i-1}), \gamma_K(\theta_i)]$ où $\theta \in [\theta_{i-1}, \theta_i]$.



Alors, $\gamma_P(\theta)$ appartient au segment $[\gamma_K(\theta_{i-1}), \gamma_K(\theta_i)]$. Il existe donc $\mu_\theta \in [0, 1]$ tel que :

$$\gamma_P(\theta) = \mu_\theta \gamma_K(\theta_{i-1}) + (1 - \mu_\theta) \gamma_K(\theta_i).$$

On en déduit alors en utilisant l'uniforme continuité :

$$\begin{aligned} |\lambda_K(\theta) - \lambda_P(\theta)| &= \|\gamma_K(\theta) - \gamma_P(\theta)\| \\ &\leq \mu_\theta \|\gamma_K(\theta) - \gamma_K(\theta_{i-1})\| + (1 - \mu_\theta) \|\gamma_K(\theta) - \gamma_K(\theta_i)\| \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Soit finalement :

$$\begin{aligned} \lambda_P(\theta) &= \lambda_P(\theta) - \lambda_K(\theta) + \lambda_K(\theta) \\ &\geq -\varepsilon + e + r \\ &\geq r. \end{aligned}$$

On en déduit donc que B_r est incluse dans le polygone P .

On montre maintenant que $P \subset K \subset (1 + \frac{\varepsilon}{r})P$.

Par convexité de K , $P \subset K$.

D'autre part, en réutilisant les inégalités précédentes :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\varepsilon}{r}\right) \lambda_P(\theta) - \lambda_K(\theta) &= (\lambda_P(\theta) - \lambda_K(\theta)) + \frac{\varepsilon}{r} \lambda_P(\theta) \\ &\geq -\varepsilon + \frac{\varepsilon}{r} \lambda_P(\theta) \\ &\geq -\varepsilon + \varepsilon \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

ce qui montre que $K \subset (1 + \frac{\varepsilon}{r})P$.

Comme $P \subset K$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$X_{\partial P} \leq X_{\gamma_K} \quad \lambda_{2,1}\text{-pp}.$$

De même :

$$X_{\gamma_K} \leq X_{(1+\frac{\varepsilon}{r})\partial P} \quad \lambda_{2,1}\text{-pp}.$$

D'où, en intégrant :

$$C \text{Per}(P) \leq \int_{\text{Grass}(2,1)} X_\gamma d\lambda_{2,1} \leq C \left(1 + \frac{\varepsilon}{r}\right) \text{Per}(P).$$

Soit :

$$C \text{Per}(K) - C\varepsilon \leq \int_{\text{Grass}(2,1)} X_\gamma d\lambda_{2,1} \leq C \left(1 + \frac{\varepsilon}{r}\right) \text{Per}(K).$$

Puis, en faisant tendre ε vers 0, on obtient finalement :

$$\mu(K) = C \text{Per}(K). \quad \square$$

Corollaire 3.1.20

La constante C vaut $\frac{2}{\pi}$.

Démonstration. Deux approches sont possibles. D'une part, il est possible de reprendre le calcul d'ores et déjà réalisé auparavant pour un segment.

D'autre part, on peut montrer la propriété en calculant directement $\mu(B_1)$. On rappelle que :

$$\mu(B_1) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \int_{\mathbb{R}} \text{Card}\{\Lambda(\theta, r) \cap \partial B_1\} dr d\theta.$$

L'idée consiste à fixer θ et à calculer :

$$\int_{\mathbb{R}} \text{Card}\{\Lambda(\theta, r) \cap \partial B_1\} dr.$$

∂B_1 étant invariant par rotation, la formule ci-dessus ne dépend pas de θ . On en déduit donc :

$$\mu(B_1) = \int_{\mathbb{R}} \text{Card}\{\Lambda(0, r) \cap \partial B_1\} dr.$$

Or, si $\Delta = \Lambda(0, r)$ intersecte ∂B_1 , alors elle intersecte ∂B_1 en 2 points presque partout. Il reste donc à évaluer la mesure de l'ensemble des $r \in \mathbb{R}$ tel que $\Lambda(0, r) = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^2 : \text{Det}(\vec{u}_0, \vec{y}) = r\}$ intersecte ∂B_1 . Cet ensemble se réduit au segment $[-1, 1]$, donc on en déduit immédiatement que :

$$\mu(B_1) = \frac{2}{\pi} 2\pi = \frac{2}{\pi} \text{Per}(B_1).$$

ce qui conclut la preuve. □

3.2 Le point de vue des valuations

Comme mentionné dans l'introduction, il est possible de traiter le problème précédent uniquement à l'aide du théorème d'Hadwiger en remarquant que la fonction :

$$\mu : \begin{cases} \mathcal{K} & \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ K & \mapsto \mu(K) \end{cases}$$

est une valuation de degré 1 dans le plan. La suite de cette partie s'attache à montrer ce résultat.

Proposition 3.2.1 (Formule du crible)

Soit $K_0, K_1 \in \mathcal{K}$ tels que $K_0 \cup K_1 \in \mathcal{K}$ et $K_0 \cap K_1 \in \mathcal{K}$. Alors :

$$\mu(K_0 \cup K_1) + \mu(K_0 \cap K_1) = \mu(K_0) + \mu(K_1). \quad (3.22)$$

Avant de démontrer ce résultat, il est rappelé que d'après le Théorème 1.4.2, la frontière d'un convexe compact d'intérieur non vide contenant 0 peut être paramétrée de manière angulaire, c'est-à-dire qu'il existe une unique fonction $\lambda_K : [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}_+$ telle que $\gamma_K : \theta \rightarrow \lambda_K(\theta)\vec{u}_\theta$ est une paramétrisation de la frontière.

On considère donc maintenant K_0, K_1 deux compacts convexes d'intérieur non vide vérifiant les hypothèses précédentes. Alors, il existe $x_0 \in (K_0 \overset{\circ}{\cap} K_1)$. En particulier, x_0 appartient à l'intérieur des ensembles suivants :

$$K_0, K_1, K_0 \cup K_1, K_0 \cap K_1.$$

Donc, quitte à translater par x_0 , on peut supposer sans perte de généralité que 0 est dans l'intérieur de chacun de ces quatre ensembles. Il est alors légitime de considérer les fonctions $\lambda_{K_0}, \lambda_{K_1}, \lambda_{K_0 \cup K_1}$ et $\lambda_{K_0 \cap K_1}$.

Pour montrer la formule du crible, on va montrer le lemme suivant :

Lemme 3.2.2

Soient $K_0, K_1 \in \mathcal{K}$ vérifiant les hypothèses précédentes. Alors :

$$\begin{cases} \lambda_{K_1 \cup K_0} = \max(\lambda_{K_1}, \lambda_{K_0}) \\ \lambda_{K_1 \cap K_0} = \min(\lambda_{K_1}, \lambda_{K_0}) \end{cases} \quad (3.23)$$

Démonstration. On montre le résultat dans le cas d'une intersection, le cas de l'union étant analogue.

On fixe dans la suite θ dans $[0, 2\pi]$.

La démonstration du Théorème 1.4.2 avait montré si K était un compact convexe d'intérieur non vide, alors :

$$\begin{cases} \forall \lambda \in]\lambda_K(\theta), +\infty[, & \lambda \vec{u}_\theta \notin K \\ \forall \lambda \in]0, \lambda_K(\theta)[, & \lambda \vec{u}_\theta \in K \end{cases}$$

ce qui fournissait au passage une caractérisation de λ_K .

Donc, si $\lambda < \min(\lambda_{K_0}(\theta), \lambda_{K_1}(\theta))$, alors $\lambda \vec{u}_\theta$ appartient à K_0 et K_1 , donc à leur intersection, ce qui donne une première inégalité :

$$\lambda_{K_0 \cap K_1}(\theta) \geq \min(\lambda_{K_0}(\theta), \lambda_{K_1}(\theta)).$$

D'autre part, si $\lambda > \min(\lambda_{K_0}(\theta), \lambda_{K_1}(\theta))$, alors il existe $i \in \{0, 1\}$ tel que $\lambda \vec{u}_\theta \notin K_i$. Donc, *a fortiori*, $\lambda \vec{u}_\theta \notin K_0 \cap K_1$, ce qui fournit :

$$\lambda_{K_0 \cap K_1}(\theta) \leq \min(\lambda_{K_0}(\theta), \lambda_{K_1}(\theta)),$$

et démontre la formule demandée dans le cas de l'intersection. \square

Démonstration (Formule du crible). On peut donc maintenant déduire la formule du crible. Pour toute droite Δ du plan, on a d'après le lemme précédent :

$$\begin{aligned} & X_{\partial K_0}(\Delta) + X_{\partial K_1}(\Delta) \\ &= \text{Card}(\theta \in [0, 2\pi[: \gamma_{K_0}(\theta) \in \Delta) + \text{Card}(\theta \in [0, 2\pi[: \gamma_{K_1}(\theta) \in \Delta) \\ &= \text{Card}(\theta \in [0, 2\pi[: \lambda_{K_0}(\theta) \vec{u}_\theta \in \Delta) + \text{Card}(\theta \in [0, 2\pi[: \lambda_{K_1}(\theta) \vec{u}_\theta \in \Delta) \\ &= \text{Card}(\theta \in [0, 2\pi[: \min_{i \in \{0,1\}} \lambda_{K_i}(\theta) \vec{u}_\theta \in \Delta) + \text{Card}(\theta \in [0, 2\pi[: \max_{i \in \{0,1\}} \lambda_{K_i}(\theta) \vec{u}_\theta \in \Delta) \\ &= \text{Card}(\theta \in [0, 2\pi[: \gamma_{K_0 \cap K_1}(\theta) \vec{u}_\theta \in \Delta) + \text{Card}(\theta \in [0, 2\pi[: \gamma_{K_0 \cup K_1}(\theta) \vec{u}_\theta \in \Delta) \\ &= X_{\partial(K_0 \cap K_1)}(\Delta) + X_{\partial(K_0 \cup K_1)}(\Delta). \end{aligned}$$

En intégrant cette relation, on obtient la formule du crible, ce qui conclut la preuve. \square

On souhaite maintenant montrer que μ est continue par rapport à la distance de Hausdorff. Afin de démontrer cette proposition, il nous faut démontrer le lemme géométrique suivant :

Lemme 3.2.3

Soit K un convexe compact non vide du plan. Alors, il existe exactement deux droites Δ_1, Δ_2 tangentes à K et de vecteur directeur \vec{u}_θ .

De plus, les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

- (i) *Toute droite Δ de vecteur directeur \vec{u}_θ strictement comprise entre Δ_1 et Δ_2 intersecte ∂K en deux points exactement.*
- (ii) *Toute droite Δ de vecteur directeur \vec{u}_θ non comprise entre Δ_1 et Δ_2 intersecte en aucun point ∂K .*

Démonstration. Le problème étant invariant par rotation, il suffit de montrer le résultat pour $\theta = 0$. Dans la suite, on note (\vec{e}_1, \vec{e}_2) la base canonique de \mathbb{R}^2 et p la projection sur \vec{e}_2 parallèlement à \vec{e}_1 .

Dans un premier, on montre l'existence de deux droites tangentes à K portées par le vecteur \vec{e}_1 . En effet, K étant connexe par arc, compact et p continue, $p(K)$ est un intervalle compact de \mathbb{R} . De plus, K n'étant pas d'intérieur vide, il s'en suit que $p(K)$ n'est pas réduit à un singleton. On note alors $p(K) = [a, b]$.

On considère alors les droites $\Delta_1 = ae_2 + \mathbb{R}e_1$ et $\Delta_2 = be_2 + \mathbb{R}e_1$. Par définition de p , les droites Δ_1 et Δ_2 vérifient les propriétés demandées.

On montre enfin les points (i) et (ii), l'unicité de Δ_1 et Δ_2 découlant de ces points.

Dans un premier temps, on considère $\Delta = ce_2 + \mathbb{R}e_1$ où $c < a$ ou $c > b$. Alors, Δ ne peut intersecter K car $p(\Delta) = c \notin [a, b]$. Donc, la propriété (ii) est prouvée.

Puis, si $c \in]a, b[$. Dans ce cas, Δ est strictement comprise entre Δ_1 et Δ_2 . Δ intersecte alors ∂K en 2 points. Cela découle de la Proposition 1.4.1 et du fait que K est d'intérieur non vide.

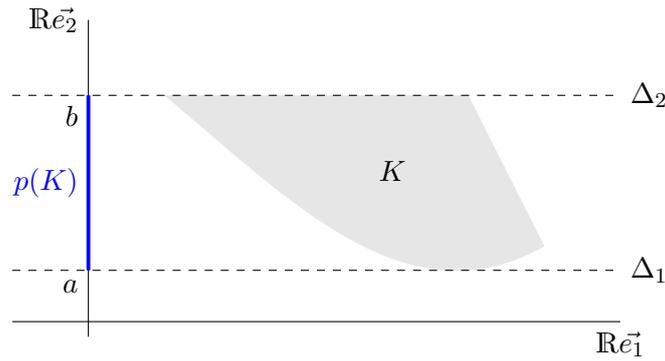


FIGURE 13 – Tangentes à un compact

Il est maintenant possible de prouver la proposition suivante :

Proposition 3.2.4

μ est continue par rapport à la distance de Hausdorff sur \mathcal{K} .

Démonstration. On fixe $K_0 \in \mathcal{K}$ et on considère ε suffisamment petit et $K_1 \in \mathcal{K}$ tel que $d_H(K_1, K_0) \leq \varepsilon$. On rappelle que :

$$\begin{aligned} |\mu(K_1) - \mu(K_0)| &\leq \int_{\text{Grass}(2,1)} |X_{\partial K_1}(\Delta) - X_{\partial K_0}(\Delta)| d\lambda_{2,1}(\Delta) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \int_{\mathbb{R}_+} |\text{Card}\{\partial K_1 \cap \Lambda(r, \theta)\} - \text{Card}\{\partial K_0 \cap \Lambda(r, \theta)\}| dr d\theta \end{aligned}$$

Afin de simplifier les notations, on posera :

$$f(r, \theta) = |\text{Card}\{\partial K_1 \cap \Lambda(r, \theta)\} - \text{Card}\{\partial K_0 \cap \Lambda(r, \theta)\}|,$$

ou de manière équivalente :

$$f(\Delta) = |\text{Card}\{\partial K_1 \cap \Delta\} - \text{Card}\{\partial K_0 \cap \Delta\}|.$$

Dans la suite, l'idée consiste à fixer θ . On note \vec{w}_θ un vecteur unitaire orthogonal à \vec{u}_θ et $\Delta_j^{(i)}$ pour $j \in \{0, 1\}$ les deux uniques tangentes au convexe K_i de vecteur directeur \vec{u}_θ , qui existent d'après le lemme précédent. On définit enfin L_j comme la distance entre $\Delta_j^{(0)}$ et $\Delta_j^{(1)}$. Afin de visualiser la situation dans le cas particulier $\Delta_0^{(1)} \leq \Delta_0^{(0)}$ et $\Delta_1^{(1)} \leq \Delta_1^{(0)}$, le lecteur est invité à se référer à la Figure 14 ci-après. Les autres cas sont similaires.

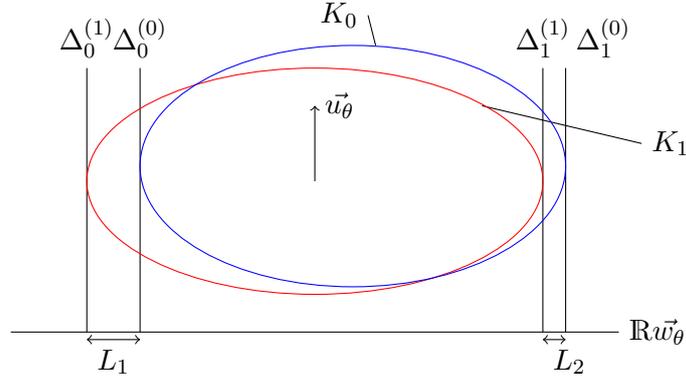


FIGURE 14 – Continuité de μ sur \mathcal{K}

On se donne maintenant $\Delta = \Lambda(\theta, r)$ une droite portée par \vec{u}_θ . Au vue de la figure, trois configurations sont possibles.

Soit Δ n'intersecte ni ∂K_1 , ni ∂K_2 , ce qui, sur la figure correspond à Δ en dehors l'intervalle $[\Delta_0^{(1)}, \Delta_1^{(0)}]$. Dans ce cas, $f(\Delta) = 0$.

Soit Δ intersecte ∂K_0 et ∂K_1 en 2 points, ce qui d'après le lemme précédent, correspond sur la figure à Δ compris strictement entre $\Delta_0^{(0)}$ et $\Delta_1^{(1)}$. Dans ce cas, $f(\Delta) = 0$.

Enfin, dans les cas restant, Δ intersecte presque sûrement l'un des deux compacts sur sa frontière en deux points et n'intersecte pas le second. Dans ce cas, $f(\Delta) = 2$ presque partout.

Donc, dans l'intégrale précédente, seul ce dernier cas contribue. Or, au vue de la figure, l'ensemble des droites qui vérifient cette propriété est de mesure inférieur à $L_1 + L_2$.

Or, $L_j \leq \varepsilon$ du fait que $\text{dist}_H(K_0, K_1) \leq \varepsilon$.

On en déduit finalement que la mesure de l'ensemble des droites $\Delta = \Lambda(\theta, r)$ telle que $f(r, \theta)$ non nulle est inférieur à 2ε et sur cet ensemble, $f(r, \theta)$ est presque partout égale à 2.

On en déduit donc, en combinant l'ensemble des éléments précédents :

$$\begin{aligned} |\mu(K_0) - \mu(K_1)| &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi 2 \times 2\varepsilon \, d\theta \\ &= 4\varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui prouve la continuité. \square

Proposition 3.2.5

μ est homogène de degré 1, c'est-à-dire que pour tout $K \in \mathcal{K}$ et $r \in \mathbb{R}$:

$$\mu(rK) = |r|\mu(K) \quad (3.24)$$

Démonstration. D'après le Lemme 3.1.11, μ est invariante par rotation. En particulier, pour une rotation de 180 degrés, on obtient $\mu(rK) = \mu(-rK)$. On est donc ramener à montrer la formule précédente pour $r \geq 0$.

Soit $r \geq 0$. On note $\gamma : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}^2$ une paramétrisation de ∂K . Alors, une paramétrisation de $\partial(rK)$ est $t \rightarrow r\gamma(t)$.

$$\begin{aligned} \mu(rK) &= \int_{\text{Grass}(2,1)} X_{\partial(rK)}(\Delta) \, d\lambda_{2,1}(\Delta) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \text{Card}\{t \in [0, 1] : \text{Det}(\vec{u}_\theta, r\gamma(t)) = s\} \, ds \, d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \text{Card}\left\{t \in [0, 1] : \text{Det}(\vec{u}_\theta, \gamma(t)) = \frac{s}{r}\right\} \, ds \, d\theta \\ &= \frac{r}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \text{Card}\{t \in [0, 1] : \text{Det}(\vec{u}_\theta, \gamma(t)) = s\} \, ds \, d\theta \\ &= r\mu(K). \end{aligned}$$

On a effectué le changement de variable $r \rightarrow sr$ à la troisième ligne. \square

Finalement, on est maintenant en mesure de démontrer les résultats principaux de cette partie :

Théorème 3.2.6

μ est une valuation sur \mathcal{K} de degré 1.

Démonstration. D'après les trois propositions précédentes, μ vérifie la formule du crible, est continue par la mesure de Hausdorff et est homogène de degré 1. Le Lemme 3.1.11 montre qu'elle est invariante par isométrie directe, ce qui conclut la preuve de ce théorème. \square

Corollaire 3.2.7

μ est proportionnelle au périmètre de constante de proportionnalité $\frac{2}{\pi}$.

Démonstration. μ est une valuation de degré 1, donc d'après le théorème d'Hadwiger, proportionnelle au périmètre. Pour calculer le coefficient de proportionnalité, il suffit de calculer la valuation du cercle unité, calcul d'ores et déjà réalisé dans la partie précédente. \square

3.3 Application au problème de l'aiguille de Buffon

Les deux paragraphes suivants contiennent des résultats qui ne seront pour la plupart pas démontrés rigoureusement mais qui vont permettre de donner un sens à tout le travail réalisé précédemment.

3.3.1 Le cas de la droite réelle

On rappelle que dans \mathbb{R} les compacts convexes sont exactement les intervalles fermés.

Définition 3.3.1

\mathcal{D} est un réseau de \mathbb{R} s'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $d > 0$ tel que $\mathcal{D} = a + d\mathbb{Z}$.

On appellera d la longueur du réseau.

On notera \mathbb{D}_d^1 l'ensemble des réseaux de \mathbb{R} dont la distance est d .

Un réseau est donc un ensemble de points, chaque point étant séparé de ses voisins par une distance d . D'autre part, on remarque que la donnée d'un élément de \mathbb{D}_d^1 correspond à la donnée d'un unique réel x dans $[0, d[$, ce qui montre que $[0, d[$ et \mathbb{D}_d^1 sont en bijection. En considérant la mesure image de la mesure de Lebesgue sur $[0, d[$, on peut donc munir \mathbb{D}_d^1 d'une mesure $\lambda_{1,0}$ dont on vérifie qu'elle est invariante par translation et qu'elle peut s'identifier à la mesure de Lebesgue.

Définition 3.3.2

Soit $K = [a, b]$ un intervalle de \mathbb{R} et $d > 0$. On note :

$$X_{\partial K}^d : \begin{cases} \mathbb{D}_d^1 \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\} \\ \mathcal{D} \mapsto \text{Card}\{\partial K \cap \mathcal{D}\} \end{cases} \quad (3.25)$$

Le problème que l'on cherche à résoudre est alors le suivant :

Etant donnée un convexe compact $K = [a, b]$ et $d > 0$, quel est le nombre moyen d'intersections de K avec un élément de \mathbb{D}_d^1 ?

Ce problème revient à calculer en fait à calculer :

$$\int_{\mathbb{D}_d^1} X_{\partial K}^d(\mathcal{D}) d\lambda_{1,0}(\mathcal{D}) \quad (3.26)$$

Un calcul explicite de cette intégrale fournit la valeur de :

$$\frac{b-a}{d}$$

Le résultat signifie que le nombre d'intersections moyenne d'un réseau de longueur d avec K est proportionnel à la longueur de l'intervalle.

3.3.2 Le cas du plan

On peut réaliser une étude similaire dans le cas du plan dans \mathbb{R}^2 qui correspond à l'énoncé original tel que posé par Buffon.

Définition 3.3.3

\mathcal{D} est un réseau de droites de \mathbb{R}^2 si \mathcal{D} est constitué d'un ensemble de droites parallèles séparées par une distance d .

d est appelée longueur du réseau.

On note \mathbb{D}_d^2 l'ensemble des réseaux de \mathbb{R}^2 de longueur d .

On admet que l'on peut munir \mathbb{D}_d^2 d'une mesure de probabilité $\lambda_{2,1}^d$ invariante par isométrie directe. Cette mesure peut être vue comme une restriction de $\lambda_{2,1}$ à un intervalle de largeur $[0, d[$. Il est possible de formaliser mathématiquement cette définition et de la rendre rigoureuse, mais afin de ne pas trop compliquer l'exposé, les détails de cette construction seront omis.

Comme précédemment, on définit :

Définition 3.3.4

Soit K un compact convexe de \mathbb{R}^2 et $d > 0$. On note :

$$X_{\partial K}^d : \begin{cases} \mathbb{D}_d^2 \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\} \\ \mathcal{D} \mapsto \text{Card}\{\partial K \cap \mathcal{D}\} \end{cases} \quad (3.27)$$

Le problème de Buffon revient à calculer le nombre d'intersection moyen de \mathbb{D}_d^2 avec ∂K soit calculer :

$$\int_{\mathbb{D}_d^2} X_{\partial K}^d(\mathcal{D}) d\lambda_{2,1}^d(\mathcal{D})$$

On peut alors vérifier que la valeur cherchée vaut

$$\frac{2 \text{Per}(K)}{\pi d}.$$

Donc le nombre moyen d'intersections du bord de K avec le réseau est à proportionnel au périmètre du compact K .

3.3.3 Dans le cas général

Le cas du plan et de la droite réelle ne sont que deux cas particuliers. En effet, dans ces deux, il est possible de trouver une mesure invariante par isométrie directe (λ sur \mathbb{R} et $\lambda_{2,1}$ dans le plan) et de construire à partir de ces mesures invariantes une mesure sur un réseau. Ce problème est néanmoins généralisable à \mathbb{R}^n . Néanmoins, la construction de mesures invariantes par isométries directes devient rapidement plus difficile et nécessite des outils plus avancés. On pourra à ce loisir consulter [\[KLAIN et ROTA\]](#).

Références

- [1] Walter RUDIN. *Complex analysis*. 2006^e éd. McGraw Hill Education, 1987. Chap. 7 - Differentiation.
- [2] Dominique HULIN. *Note de cours magistère L3 : Dimension de Hausdorff*. 2019.
- [3] Daniel A. KLAIN et Gian Carlo ROTA. *Introduction to Geometric Probability*. Lezioni Lincee. Cambridge University Press, 1997, p. 1–4.
- [4] Julien DUVAL. *Note de cours : Théorie de la mesure et analyse de Fourier*. 2019.