UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Probabilité et statistique pour l'ingénieur

Examen terminal

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Justifiez toutes vos réponses.

Durée : 2h

Question de cours

- Rappeler la définition d'une loi de géométrique.
- Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ et Y une loi de Poisson de paramètre μ. Quelle est la loi de la variable aléatoire $X+Y$? Justifier votre réponse.
- Rappeler et redémontrer l'inégalité de Markov.
- Enoncer proprement la loi faible des grands nombres.
- Enoncer proprement le théorème central limite.

Exercice 1

On suppose que dans une région la proportion de moutons ayant une certaine maladie est de $1/100$. Si le mouton n'est pas atteint, la probabilité que le test T soit négatif est de $9/10$. S'il est atteint, la probabilité que le test T soit positif est de $8/10$.

- Quelle est la probabilité pour qu'un mouton pris au hasard ayant un test positif soit atteint par cette maladie ?

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire dans $\mathbb{Z}$ de loi donnée par $\mathbb{P}(X=k)=2^{-|k|-1}$ pour $k \neq 0$ et $\mathbb{P}(X=0)=0$.

- Déterminer la loi de la variable aléatoire Y définie par $Y(\omega)=X(\omega)^2$.
- Déterminer la loi de la variable aléatoire Z définie par $Z(\omega)=2+cos(\pi X(\omega))$

Exercice 3

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On considère l'application $F_{a,b}$ définie par :

$$F_{a,b}(t) = \begin{cases} ae^t & \text{si } t<0 \\ \frac{1}{2}e^{-t}+b & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur le couple (a, b) pour que $F_{a,b}$ soit la fonction de réparition d'une variable aléatoire X.
2. A quelle condition la variable aléatoire X admet-elle une densité ?

Exercice 4

Soit $Z = (X, Y)$ un couple aléatoire de densité p donnée par $p(x, y) = Cxe^{-y}$ si $0 < x < y$ et $p(x, y) = 0$ sinon.

1. Dessiner le domaine du plan sur lequel p n'est pas nulle.
2. Calculer k.
3. Déterminer les densités marginales de Z, c'est à dire la loi de X et la loi de Y.
4. Déterminer la loi de $T = Y - X$.

Exercice 5

Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels qui tend vers zéro. On suppose que pour tout n, on a $p_n \in]0, 1[$. On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p_n (c'est à dire : $\mathbb{P}(X_n = 1) = p_n$ et $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - p_n$).

1. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers zéro.
2. Est-ce que l'hypothèse d'indépendance est nécessaire pour avoir cette convergence ?
3. A quelle condition a-t-on convergence presque sûre vers zéro ?