PSIN - Correction du devoir maison

Exercice 1

a) La variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre 2. On a donc $X > 0$ presque sûrement.

Si $X \in (0,1)$, alors $X \leq 1/X$, et donc $Y = \max\{X, 1/X\} = 1/X \geq 1$. Si $X \geq 1$, alors $X \geq 1/X$, et donc $Y = \max\{X, 1/X\} = X \geq 1$.

Dans les deux cas, on a $Y \geq 1$. Donc Y est à valeurs dans $[1, +\infty)$ presque sûrement.

b) Soit $F : \mathbb{R}_+ \to [0,1]$ la fonction de répartition de Y. D'après la question **a)**, si $t < 1$ alors $F(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = 0$.

Soit $t \in [1, +\infty)$. Alors :

$$\begin{aligned}
\{Y \leq t\} &= \{\max\{X, 1/X\} \leq t\} \\
&= \{X \leq t \text{ et } 1/X \leq t\} \\
&= \{X \leq t \text{ et } X \geq 1/t\} \\
&= \{X \in [1/t, t]\}.
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
F(t) &= \mathbb{P}(X \in [1/t, t]) \\
&= \int_{\frac{1}{t}}^{t} 2e^{-2s} \, \mathrm{d}s \\
&= \left[-e^{-2s}\right]_{\frac{1}{t}}^{t} \\
&= e^{-\frac{2}{t}} - e^{-2t},
\end{aligned}$$

d'où :

$$F(t) = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \text{si} & t < 1 \\ e^{-\frac{2}{t}} - e^{-2t} & \text{si} & t \geq 1 \end{array} \right. .$$

c) La densité de la loi d'une variable aléatoire continue s'obtient en dérivant sa fonction de répartition (les éventuels points de discontinuté de la dérivée importent peu, s'ils sont au plus dénombrables). La dérivée de F en t est nulle si $t < 1$, et se calcule aisément si $t > 1$. La loi de Y a donc pour densité la fonction ρ définie par :

$$\rho(y) = 2 \cdot 1_{y \geq 1} \left(e^{-2y} + \frac{1}{y^2} e^{-\frac{2}{y}} \right).$$

Exercice 2

a) Soit $p(x) := 1_{x\geq 0}e^{-x}$ la densité de la loi de X, et $q(x) := 2^{-1}1_{[0,2]}(x)$ la densité de la loi de Y (attention à ne pas oublier le facteur 1/2 !). Soit r la densité de la loi de $X+Y$. Les variables aléatoires X et Y étant indépendantes, la densité de $X+Y$ est donnée par le produit de convolution de p et de q. Ainsi, pour presque tout réel x,

$$r(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(y)q(x-y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-y}1_{x-y\in[0,2]}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-y}1_{[x-2,x]}(y)\,\mathrm{d}y.$$

Si $x<0$, alors $r(x)=0$ (cela vient du fait que X et Y sont toutes deux positives, donc leur somme l'est aussi). Si $x\in[0,2]$, alors $1_{[x-2,x]}(y) = 1_{[0,x]}(y)$ pour tout $y\geq 0$, d'où :

$$r(x) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-y}1_{[0,x]}(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^{x} e^{-y}\,\mathrm{d}y = \frac{1-e^{-x}}{2}.$$

Enfin, si $x>2$, alors :

$$r(x) = \frac{1}{2}\int_{x-2}^{x} e^{-y}\,\mathrm{d}y = \frac{e^2-1}{2}e^{-x}.$$

Pour résumer,

$$r(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<0 \\ \frac{1-e^{-x}}{2} & \text{si} \quad x\in[0,2] \\ \frac{e^2-1}{2}e^{-x} & \text{si} \quad x>2 \end{cases}.$$

b) On se réfère au cours ou au TD pour le calcul de la fonction caractéristique d'une loi normale. Pour tout ξ réel, on a $\mathbb{E}(e^{i\xi X}) = e^{i\mu\xi - \frac{\sigma^2\xi^2}{2}}$ et $\mathbb{E}(e^{i\xi Y}) = e^{i\nu\xi - \frac{\tau^2\xi^2}{2}}$. De plus,

$$\mathbb{E}(e^{i\xi(X+Y)}) = \mathbb{E}(e^{i\xi X}e^{i\xi Y}) = \mathbb{E}(e^{i\xi X})\mathbb{E}(e^{i\xi Y}) = e^{i\mu\xi-\frac{\sigma^2\xi^2}{2}}e^{i\nu\xi-\frac{\tau^2\xi^2}{2}} = e^{i(\mu+\nu)\xi - \frac{(\sigma^2+\tau^2)\xi^2}{2}},$$

où l'égalité $\mathbb{E}(e^{i\xi X}e^{i\xi Y}) = \mathbb{E}(e^{i\xi X})\mathbb{E}(e^{i\xi Y})$ découle du fait que X et Y sont indépendantes. On reconnaît au final la fonction caractéristique d'une loi normale de paramètres $\mu+\nu$ et $\sigma^2+\tau^2$. Donc $X+Y$ suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu+\nu, \sigma^2+\tau^2)$.

c) On se réfère au cours ou au TD pour la fonction caractéristique d'une loi de Poisson. Pour tout ξ réel, on a $\mathbb{E}(e^{i\xi X}) = e^{\lambda(e^{i\xi}-1)}$ et $\mathbb{E}(e^{i\xi Y}) = e^{\mu(e^{i\xi}-1)}$. De plus,

$$\mathbb{E}(e^{i\xi(X+Y)}) = \mathbb{E}(e^{i\xi X}e^{i\xi Y}) = \mathbb{E}(e^{i\xi X})\mathbb{E}(e^{i\xi Y}) = e^{\lambda(e^{i\xi}-1)}e^{\mu(e^{i\xi}-1)} = e^{(\lambda+\mu)(e^{i\xi}-1)},$$

où l'égalité $\mathbb{E}(e^{i\xi X}e^{i\xi Y}) = \mathbb{E}(e^{i\xi X})\mathbb{E}(e^{i\xi Y})$ découle du fait que X et Y sont indépendantes. On reconnaît au final la fonction caractéristique d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$. Donc $X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.