TD 3 : Éléments de mathématiques financières

Section 1. Intérêts Composés

Ex 1. Un capital de 8 000 euros est placé à intérêts composés au taux annuel de $4,5\%$. On note C_n la valeur acquise au bout de n années de placement.
a. Calculer C_1, C_2 et C_3.
b. Écrire l'expression de C_n en fonction de n.
c. Quelle est la valeur acquise au bout de 7 ans ?
d. Quelle est la valeur acquise au bout de 7 ans et 8 mois ?
Solution. a. Soit $t = 4,5\%$ le taux d'intérêt. Chaque année, le capital est multiplié par $1 + \frac{4,5}{100} = 1 + 0,045 = 1,045$. L'année 0, le capital est de $C_0 = 8\,000$€. On trouve :

- $C_1 = C_0 \times 1,045 = 8\,000 \times 1,045 = 8\,360$€ ;
- $C_2 = C_1 \times 1,045 = 8\,736,2$€ ;
- $C_3 = C_2 \times 1,045 \simeq 9\,129,33$€.

b. La formule du cours (ou une application du principe de récurrence) donne $C_n = C_0(1+t)^n = 8\,000 \times (1,045)^n$
c. On applique la formule précédente à $n = 7$. On trouve $C_7 \simeq 10\,886,89$€.
d. Il faut tout d'abord convertir la durée en années (car le taux d'intérêt est annuel). 7 ans et 8 mois $= 7 + \frac{8}{12} = 7,67$ années. La valeur acquise est donc de $C_{7,67} \simeq 11211,1$€.

Ex 2. A la naissance de Matteo, son grand-père lui a offert un compte d'épargne sur lequel il a déposé avec un petit pécule. Aujourd'hui, pour son 18ème anniversaire, Matteo dispose de 8 359€. Sachant que le taux d'intérêt moyen a été de $3,5\%$ et qu'il n'y pas eu d'autres opérations ni de frais de gestion, calculez le capital déposé par le grand père.
Solution. Le capital épargné après n années C_n suit une évolution à taux constant de $3,5\%$:

$$C_n = C_0(1+t)^n = C_0(1+0,035)^n = C_0 \times 1,035^n.$$

On prend pour année 0 l'année courante, donc $C_0 = 8\,359$. Le capital recherché est alors celui d'il y a 18 ans, c'est-à-dire C_{-18} :

$$C_{-18} = 8\,359 \times 1,035^{-18} \simeq 4\,500,16.$$

Son grand-père avait déposé 4 500€ sur ce compte.

Ex 3. Madame Ganga a un capital de 10 000 euros placé à intérêts composés. Au bout de 8 ans, son capital se monte à 14 774, 55 euros. À quel taux d'intérêt a-t-il été placé ?
Solution. Soit C_n le capital placé après n années, et t le taux d'intérêt annuel. Les données du problème donnent $C_0 = 10\,000$ (placement initial) et $C_8 = 14\,774,55$ (placement après 8 ans). Le capital évoluant à taux constant,

$$C_n = C_0(1+t)^n.$$

Donc, en prenant $n = 8$, on trouve

$$\begin{aligned} 14\,774,55 &= 10\,000(1+t)^8 \\ (1+t)^8 &= \frac{14\,774,55}{10\,000} = 1,477455 \\ 1+t &= 1,477455^{\frac{1}{8}} \simeq 1,050 \\ t &\simeq 0,050 = 5\% \end{aligned}$$

Le taux d'intérêt est donc de 5% par an.

Ex 4. Il y a 10 ans, M. Rossi a déposé 20 000€ sur un compte épargne qui assure un taux de 3%. Sept ans après, il a retiré 10 000€. Combien y a-t-il d'argent sur son compte aujourd'hui ?
Solution. On peut procéder de deux façons différentes.
Première méthode : On actualise à chaque nouvelle opération, donc dans notre cas après 7 ans. Soit C_n le capital après n années. On a $C_0 = 20\,000$€.
Après 7 ans et le retrait effectué, le capital se porte à

$$C_7 = C_0 \times 1,03^7 - 10\,000 = 20\,000 \times 1,03^7 - 10\,000 \simeq 24\,597,48 - 10\,000 = 14\,597,48.$$

Après 3 ans supplémentaires, le capital se porte à

$$C_{10} = C_7 \times 1,03^3 \simeq 14\,597,48 \times 1,03^3 \simeq 15\,951,06.$$

M. Rossi a donc $15\,951,06$ sur son compte.
Deuxième méthode : On traite chaque dépôt ou retrait séparément. Le dépôt initial de 20 000€ a accru des intérêts de 3% par an pendant 10 ans. Il a donc une valeur actualisée de

$$20\,000 \times 1,03^{10} \simeq 26\,878,33.$$

Le retrait de 10 000€correspond à un dépôt de $-10\,000$€. Il a accru des intérêts de 3% par an pendant 3 ans. Il a donc une valeur actualisée de

$$-10\,000 \times 1,03^3 \simeq -10\,927,27.$$

Le capital actuel est la somme de ces deux capitaux, soit $26\,878,33 - 10\,927,27 = 15\,951,06$€.

Ex 5. Le 1er Janvier 2000, M. Estrella a ouvert un compte épargne qui donne un taux d'intérêt annuel de 5%.
Le tableau ci-dessous indique les opérations effectuées depuis l'ouverture. Calculer la valeur acquise au 1er Janvier 2020 par chaque dépôt ou retrait. En déduire le capital total disponible à cette date.

Date	Dépôt /retrait (€)	années de capitalisation	Valeur acquise au 01/01/20
01/01/2000	30 000		
01/10/2001	10 000		
01/01/2015	-10 000		
01/10/2016	-30 000		

Solution. La valeur actualisée d'un versement V après n années est de $V \times 1,05^n$. Ici, il faudra faire attention au calcul du nombre d'années n. Par exemple, entre le 01/10/2001 et le 01/01/2020, il s'est écoulé 3 mois (du 01/10/2001 au 01/01/2002) et 18 ans (du 01/01/2002 au 01/01/2020), soit $18 + \frac{3}{12} = 18,25$ ans.

Date	Dépôt /retrait (€)	années de capitalisation	Valeur acquise au 01/01/20
01/01/2000	$30\,000$	20 ans	$79\,598,93$
01/10/2001	$10\,000$	18 ans et 3 mois = 18.25 ans	$24\,361,54$
01/01/2015	$-10\,000$	5 ans	$-12\,762,81$
01/10/2016	$-30\,000$	3 ans et 3 mois = 3,25 ans	$-35154,95$
-	-	Total	$56\,042,71$

Section 2. Emprunts

Ex 6. Pour financer ses études, un étudiant veut souscrire à un prêt à un taux **annuel** de 5%.
a. Convertir le taux annuel en un taux mensuel.
b. Il a prévu de rembourser en 10 **ans** avec des **mensualités** constantes de 80€. Quel capital peut-il emprunter ?
c. Après quelques réflexions, l'étudiant a décidé d'emprunter 10 000€, toujours en remboursant sont prêt sur 10 ans. À combien les mensualités se porteront-elles ?
d. Après plus de réflexions, notre étudiant estime que, pour rembourser son prêt de 10 000€, ses mensualités ne doivent pas dépasser 80€. Combien de temps lui faudra-t-il pour rembourser le prêt ?

Solution. a. Le taux d'intérêts mensuel t_m se calcule à partir du taux annuel t_a comme vu précédemment :

$$\begin{aligned}(1+t_m)^{12} &= 1+t_a = 1,05\\ 1+t_m &= 1,05^{\frac{1}{12}} \simeq 1,004074124\\ t_m &\simeq 0,004074124\end{aligned}$$

Dans la suite, on utilise ta formule de l'emprunt :

$$C = p\left(\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}\right),$$

où C est le capital emprunté, p le montant de chaque remboursement, t le taux d'intérêt et n la durée de l'emprunt.
Il faut que les unités soient cohérentes. Les remboursements sont mensuels, donc les autres données doivent être en mois. En particulier, n doit être en mois, et il faut utiliser dans cette formule le taux d'intérêt mensuel t_m.
b. On connaît le montant des mensualités $p = 80$, le taux d'intérêt mensuel t_m et la durée du prêt $n = 10 \times 12 = 120$ mois. On cherche le capital emprunté C. On trouve directement :

$$C = 80\left(\frac{1-(1,004074124)^{-120}}{0,00407412}\right) \simeq 7\,581,25$$

Attention au passage à ne pas diviser par $1+t_m$ au lieu de t_m. Le capital emprunté est donc de $7\,581,25$€.
c. On connaît le capital emprunté $C = 10\,000$, le taux d'intérêt mensuel t_m et la durée du prêt $n = 120$ mois. On cherche le montant des mensualités p. On trouve :

$$\begin{aligned}10\,000 &= p\left(\frac{1-(1,004074124)^{-120}}{0,00407412}\right)\\ 10\,000 &\simeq p \times 94,765590469\\ p &\simeq \frac{10\,000}{94,765590469} \simeq 105,52.\end{aligned}$$

Les mensualités se montent à $105,52$€.
d. On connaît le capital emprunté $C = 10\,000$, le montant des mensualités p et le taux d'intérêt mensuel t_m. On cherche la durée du prêt n. On trouve :

$$\begin{aligned}10\,000 &= 80\left(\frac{1-(1,004074124)^{-n}}{0,00407412}\right)\\ 1-(1,004074124)^{-n} &\simeq \frac{10\,000 \times 0,00407412}{80} \simeq 0,50589\\ 1,004074124^{-n} &\simeq 1-0,50589 = 0,49411\\ -n\log(1,004074124) &\simeq \log(0,49411)\\ n &\simeq -\frac{\log(0,49411)}{\log(1,004074124)} \simeq 173,39\end{aligned}$$

Le prêt durera donc 174 mois. On a $174/12 = 14,5$, donc le prêt durera 14 ans et 6 mois.

Exercices supplémentaires

Ex 7. Le 01/01/1990, Mme Agech a déposé 10 000€ sur un compte épargne. Les premières années, la banque lui assurait un taux d'intérêt de 5%, mais à un certain moment le taux a baissé à 2%. Sachant que le 01/01/2020 il y avait 35 797€ sur le compte épargne, déterminer à quelle date la banque a changé le taux.
Solution. Soit C_n le capital disponible l'année n. On fixe l'origine au premier dépôt, c'est-à-dire au 01/01/1990. On cherche l'année N auquelle le taux a baissé.
Entre l'année 0 et l'année N, il s'est écoulé N années et le taux d'intérêt était de 5% ; le capital au 1er janvier de l'année N était donc de

$$C_N = C_0 \times 1,05^N = 10\,000 \times 1,05^N.$$

Entre l'année N et l'année 30 (qui correspond au 1er janvier 2020), il s'est écoulé $30 - N$ années et le taux d'intérêt était de 2% ; le capital au 1er janvier 2020 est donc de

$$C_{30} = C_N \times 1,02^{30-N} = 10\,000 \times 1,05^N \times 1,02^{30-N}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
35\,797 &= 10\,000 \times 1,05^N \times 1,02^{30-N} \\
\frac{35\,797}{10\,000} &= 1,05^N \times 1,02^{30} \times 1,02^{-N} \\
\frac{3,5\,797}{1,02^{30}} &= \frac{1,05^N}{1,02^N} \\
\left(\frac{1,05}{1,02}\right)^N &\simeq 1,976248161 \\
N \log\left(\frac{1,05}{1,02}\right) &\simeq \log(1,976248161) \\
N &\simeq \frac{\log(1,976248161)}{\log\left(\frac{1,05}{1,02}\right)} \simeq 23,50.
\end{aligned}$$

Le taux a donc changé après $23,5$ ans $=$ 23 ans et 6 mois, donc au 1er juillet 2013.

Ex 8. Un placement d'épargne a les caractéristiques suivantes. Chaque année, l'argent placé rapporte un bénéfice de 5%, et 200€ de frais de gestion sont prélevés sur l'argent placé (après versement des bénéfices).
a. Alice a placé 10 000 €. Combien en aura-t-elle après une année ?
b. On note C_n l'argent dont dispose Alice après n années, en euros (avec $u_0 = 10000$). Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n.
c. Quelle somme faut-il placer pour que le montant épargné ne change pas d'une année à l'autre ? On notera C^* cette valeur (en euros) **d.** On pose $D_n := C_n - C^*$. Trouver D_0, et exprimer D_{n+1} en fonction de D_n. **e.** En déduire une formule explicite pour C_n. **f.** Supposons qu'Alice n'ait versé initialement que 2 000€. En combien de temps aurait-elle perdu son épargne ?
Solution. Le rendement du placement étant de 5%, après un an, l'argent disponible avant frais de gestion est de :

$$1,05 \times 10\,000 = 10\,500.$$

Après prélèvement des frais de gestion, il reste donc 10 300 € à Alice.
a. Après un an et avant prélèvement des frais, Alice dispose de $1,05C_n$ €. Après prélèvement, il lui reste $(1,05C_n - 200)$ €. Par conséquent,

$$C_{n+1} = 1,05C_n - 200.$$

b. On cherche C^* tel que $C^* = 1,05C^* - 200$ (le membre de gauche est l'argent placé initialement, le membre de droite l'argent disponible après un an). Ainsi :

$$\begin{aligned} C^* &= 1,05C^* - 200 \\ 200 &= 1,05C^* - C^* \\ 200 &= 0,05C^* \\ C^* &= \frac{200}{0,05} \\ C^* &= 4\,000 \end{aligned}$$

Il faut donc épargner 4 000 €pour que la somme placée ne change pas d'une année à l'autre.

c. On a $D_0 = C_0 - C^* = 10\,000 - 4\,000 = 6\,000$, et, pour tout $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= C_{n+1} - C^* \\ &= (1,05C_n - 200) - (1,05C^* - 200) \\ &= 1,05C_n - 200 - 1,05C^* + 200 \\ &= 1,05C_n - 1,05C^* \\ &= 1,05(C_n - C^*) \\ &= 1,05D_n. \end{aligned}$$

d. On reconnaît une évolution à taux constant, et donc :

$$D_n = D_0 \times (1,05)^n.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} C_n &= D_n + C^* \\ &= D_0 \times (1,05)^n + C^* \\ &= 6\,000 \times (1,05)^n + 4\,000. \end{aligned}$$

e. La même méthode fonctionne quelque soit le placement initial C_0 ; la seule différence est qu'il faut prendre $D_0 = C_0 - C^*$. Ainsi, si l'on place une somme initiale de 2 000 €, on a au temps n :

$$\begin{aligned} C_n &= D_n + C^* \\ &= D_0 \times (1,05)^n + C^* \\ &= (C_0 - C^*) \times (1,05)^n + C^* \\ &= (2\,000 - 4\,000) \times (1,05)^n + 4\,000 \\ &= 4\,000 - 2\,000 \times (1,05)^n. \end{aligned}$$

Soit N le nombre d'années avant que l'argent placé atteigne 0€. On a :

$$\begin{aligned} 4\,000 - 2\,000 \times (1,05)^N &= 0 \\ 4\,000 &= 2\,000 \times (1,05)^N \\ 1,05^N &= \frac{4\,000}{2\,000} \\ 1,05^N &= 2 \\ N\ln(1,05) &= \ln(2) \\ N &= \frac{\ln(2)}{\ln(1,05)}. \end{aligned}$$

Numériquement, on trouve $N \simeq 14,2$. Le compte atteindra un solde nul (voire négatif) après 15 ans.