

TD 1 : SYSTÈMES LINÉAIRES

Objectifs :

- Savoir résoudre un système linéaire.
- S'entraîner à la mise en équation et résolution de problèmes quantitatifs.

Méthode de résolution des systèmes linéaires par substitution :

- Exprimer une des variables en fonction des autres, à l'aide d'une des équations.
- Remplacer cette variable par l'expression obtenue, dans les autres équations.
- Recommencer avec une nouvelle variable, autant de fois que nécessaire.
- Simplifier et Conclure

Ex 1. Résoudre les systèmes :

$$\text{a. } \begin{cases} 2x - 4y = 16 \\ 5x - 0,5y = 21 \end{cases} \quad \text{b. } \begin{cases} 0,5x - t = 1 \\ 1,5x + 2t = 1 \end{cases} \quad \text{c. } \begin{cases} 2(a + b) = 3b \\ a + 2b = 7,5 \end{cases} \quad \text{d. } \begin{cases} 2i - j - 8 = 0 \\ \frac{1}{2}(i + j) - 10 = 1 \end{cases}$$

Solution. a. $x = 4$ $y = -2$ b. $t = -0.4$, $x = 1.2$ c. $a = 1.5$, $b = 3$ d. $i = 10$, $j = 12$

Ex 2. La salle d'un théâtre compte 400 places. Les places « parterre » sont à 35 euros et les places « balcon » sont à 25 euros. Quand le théâtre est plein, la recette est de 12 350 euros. Combien y a-t-il de « parterre » ? Combien de « balcon » ?

Solution. Soient :

p = nombre de places « parterre »

b = nombre de places « balcon »

Nombre total de places = Nombre de parterres + Nombre de balcons

Donc $400 = p + b$.

Recette totale = Recette des parterres + Recette des balcons

De plus, Recette des parterres = Nombre de parterres \times prix d'un parterre = $35p$.

De même, Recette des balcons = $25b$.

Donc $12350 = 35p + 25b$.

$$\begin{cases} p + b = 400 \\ 35p + 25b = 12350 \end{cases}$$

On trouve $b = 165$ et $p = 235$.

Ex 3. Une usine fabriquant des torchons et des serviettes décide de les vendre par lots de deux types :

Lot A: qui contient 9 torchons et 6 serviettes.

Lot B: qui contient 2 torchons et 12 serviettes

Elle a en stock 3200 torchons et 4800 serviettes.

Combien de lots de chaque sorte doivent être vendus pour épuiser le stock ?

Solution. Soient :

a = nombre de lots A

b = nombre de lots B

Quantité totale de torchons = quantité de torchons dans les lots A + quantité de torchons dans les lots B

Donc $3200 = 9a + 2b$.

Quantité totale de serviettes = quantité de serviettes dans les lots A + quantité de serviettes dans les lots B

Donc $4800 = 6a + 12b$.

$$\begin{cases} 9a + 2b = 3200 \\ 6a + 12b = 4800 \end{cases}$$

On trouve $a = 300$ et $b = 250$.

Ex 4. Un restaurateur se fournit au marché. Il a acheté 33 kilogrammes de légumes (tomates à 4 euros le kilo, haricots à 3 euros le kilo, concombres à 2 euros le kilo) pour 98 euros au total.

Sachant qu'il a dépensé 46 euros de plus sur les haricots que sur les tomates, combien de kilogrammes a-t-il acheté de chaque type de légumes ?

Vous poserez le système correspondant sans chercher à le résoudre.

Solution. Soient :

t = quantité de tomates achetées (en kg)

h = quantité de haricots achetés (en kg)

c = quantité de concombres achetés (en kg)

Quantité totale de légume = quantité de tomate + quantité de haricots + quantité de concombres

Donc $t + h + c = 33$.

Prix total = prix des tomates + prix des haricots + prix des concombres

Donc $4t + 3h + 2c = 98$.

Prix des haricots = Prix des tomates + 46

Donc $3h = 4t + 46$.

$$\begin{cases} t + h + c = 33 \\ 4t + 3h + 2c = 98 \\ 3h = 4t + 46 \end{cases}$$

On trouve $c = 6$, $h = 22$, $t = 5$.

Ex 5. (Concours Passerelle) Lors d'une tombola, 56 billets ont été vendus, par lots de 2 ou 3 billets. Sachant qu'il y a deux fois plus de personnes ayant acheté 2 billets que de personnes en ayant acheté 3, combien de personnes ont participé à la tombola ?

Solution. Soient :

d = nombre de participants ayant acheté deux billets

t = nombre de participants ayant acheté trois billets

Nombre total de billets vendus = nombre de billets vendus par 2 + nombre de billets vendus par 3

Donc $56 = 2d + 3t$.

Nombre de personnes ayant acheté 2 billets = 2 × Nombre de personnes ayant acheté 3 billets

Donc $d = 2t$.

$$\begin{cases} 2d + 3t = 56 \\ d = 2t \end{cases}$$

On trouve $d = 16$ et $t = 8$. Le nombre de participant est $d + t = 16 + 8 = 24$.

EXERCICES FACULTATIFS

Ex 6. Résoudre les systèmes :

$$\text{a. } \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x + y - z = 1 \\ x + z = 2 \end{cases} \quad \text{b. } \begin{cases} 2x - 3y + 5z = 110 \\ 5x - 2y + 4z = 130 \\ 6x + 3y - 4z = 0 \end{cases}$$

Solution. a. $x = 3/4, y = 0, z = 5/4$ b. $x = 10, y = 20, z = 30$