Chapitre 1. Puissances, Logarithmes et Évolution à taux constant

Mathématiques et statistiques appliquées
Département TC1-IUT de Sceaux

Damien Thomine

Objectifs

- Manipuler les modèles d'**évolution à taux constant**.
- Utiliser la fonction puissance pour calculer ou convertir des taux de croissance.
- Utiliser la fonction logarithme pour calculer des durées.

Plan du cours

Section 1

Révision des puissances

Puissances d'un nombre

- Si n est un nombre entier ($n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$) et b un nombre réel, b **à la puissance** n est le nombre

$$b^n := \underbrace{b \times b \times ... \times b}_{\text{n fois}}$$

  Exemples : $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$;
  $(-3)^3 = (-3) \times (-3) \times (-3) = -27$; $\quad (1,5)^2 = 2,25$.

- Si $b > 0$ on peut définir b^x pour tout nombre réel x, et le calculer à l'aide d'une calculatrice.
  Exemple : $2^{3,5} \approx 11,31$; $\quad 4,3^{1/2} \approx 2,07$; $\quad 3,5^{-1,8} \approx 0,10$.

Exemples : Si $b > 0$, alors $b^{0.5} = \sqrt{b}$.
Remarque : Si $b \leq 0$, la puissance b^x n'est pas définie pour tout les x.
Exemples : $(-2)^{0,5}$ =ERREUR ; 0^{-2} =ERREUR.

Test : utiliser la calculette

La touche qui permet de calculer les puissances sur une calculette est :
$\boxed{\hat{}}$ ou $\boxed{x^{\square}}$ ou $\boxed{x^y}$

Calculer à l'aide d'une calculette :

- $2^{7,2} \cong \boxed{147{,}03}$
- $(-3)^4 \cong \boxed{\ 81\ }$=$(-3)\hat{}4$
  Attention au parenthèse $-3\hat{}4 = -81$
- $1,5^{1/3} \cong \boxed{\ 1{,}14\ }$=$1,5\hat{}(1/3)$
  Attention aux parenthèses $1,5\hat{}1/3 = 1,5/3 = 0,5$
- $(-3)^{0,25} \cong \boxed{\text{Erreur}}$

Propriétés fondamentales des puissances

Si $a > 0$ et $b > 0$:

- $a^x \times b^x = (a \times b)^x$
  Exemples :
  $a^3 \times b^3 = \underbrace{a \times a \times a}_{a^3} \times \underbrace{b \times b \times b}_{b^3} = (a \times b) \times (a \times b) \times (a \times b) = (a \times b)^3$
  $7^2 \times 3^2 = (7 \times 3)^2 = 21^2$
- $b^x \times b^y = b^{x+y}$
  Exemples : $b^3 \times b^2 = \underbrace{b \times b \times b}_{b^3} \times \underbrace{b \times b}_{b^2} = b^{3+2} = b^5$
  $3^{1,5} \times 3^4 = 3^{1,5+4} = 3^{5,5}$
- $(b^x)^y = b^{xy}$
  Exemples : $(b^2)^3 = b^2 \times b^2 \times b^2 = \underbrace{b \times b}_{b^2} \times \underbrace{b \times b}_{b^2} \times \underbrace{b \times b}_{b^2} = b^{2\times 3} = b^6$
  $(3^4)^{\frac{1}{2}} = 3^{4\times\frac{1}{2}} = 3^2$

Test

Simplifier les expressions suivantes :

- $(2x)^2 = \boxed{2^2x^2 = 4x^2}$
- $x^4x^{-3} = \boxed{x^{4-3} = x^1 = x}$
- $x^4x = \boxed{= x^4x^1 = x^{4+1} = x^5}$
- $(x^7)^3 = \boxed{x^{7\times 3} = x^{21}}$
- $(x^7)^{1/7} = \boxed{x^{7\frac{1}{7}} = x^1 = x}$
- $(y^3)^4y^{-2} = \boxed{y^{3\times 4}y^{-2} = y^{12-2} = y^{10}}$

Autres propriétés des puissances

Si $b > 0$:

- $b^0 = 1$
  Pourquoi ? $b^0 \times b^2 = b^{0+2} = b^2$ donc $b^0 = \frac{b^2}{b^2} = 1$
- $b^{-x} = \frac{1}{b^x}$.
  Pourquoi ? $b^x \times b^{-x} = b^{x-x} = b^0 = 1$
  Exemple : $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$.
- $\frac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$.
  Pourquoi ? $\frac{b^x}{b^y} = b^x \frac{1}{b^y} = b^x b^{-y} = b^{x-y}$
  Exemple : $\frac{3^9}{3^7} = 3^{9-7} = 3^2$.

Test

Simplifier les expressions suivantes :

- $\frac{a^7}{a^5} = \boxed{a^{7-5} = a^2}$
- $\frac{y}{y^4} = \boxed{\frac{y^1}{y^4} = y^{1-4} = y^{-3} = \frac{1}{y^3}}$
- $y^2 \frac{y^5}{y^4} = \boxed{y^2 y^{5-4} = y^{2+5-4} = y^3}$
- $(2y^2)^5 y^{-10} = \boxed{2^5 (y^2)^5 y^{-10} = 32 y^{2\times 5-10} = 32 y^0 = 32 \times 1 = 32}$

Attention à l'addition !

Les puissances se comportent bien avec les produits, pas avec les sommes !

- $(2+3)^2 = \boxed{5^2 = 25}$
- $2^2 + 3^2 = \boxed{4 + 9 = 13}$
- $2^2 + 2^3 = \boxed{4 + 8 = 12}$
- $2^{2+3} = \boxed{2^5 = 32}$

Section 2

Évolution à taux constant

Taux d'évolution

Taux et coefficient multiplicateur

On se fixe une période. Une grandeur vaut y_0 au début de cette période et y_1 à la fin.
On dit qu'une grandeur évolue avec un **taux** t si

$$y_1 = (1+t)y_0.$$

On appelle **coefficient multiplicateur** la grandeur $k = 1 + t$.

début		fin époque 1
y_0	$\xrightarrow{\text{1+t}}$	$y_1 = y_0(1+t)$

Exemple : Le chiffre d'affaire d'une entreprise a augmenté de 30% au cours d'une année

début		fin de l'année
200 K€	$\xrightarrow{1+30\%=1{,}3}$	$260 = 200 \times 1,3$ K€

Évolutions successives

Exemple : Le chiffre d'affaire d'une entreprise a augmenté de 40% une année et baissé de 30% l'année suivante.

$$\begin{array}{ccccc} 200\text{ K€} & \xrightarrow{\text{1+0,4}} & 280 = 200 \times 1,4 & \xrightarrow{\text{1-0,3}} & 196 = 280 \times 0,7 \\ 200\text{ K€} & & \xrightarrow[1,4\times 0,7=0,98]{\hspace{6cm}} & & 196 = 200 \times 0,98 \end{array}$$

Évolution **globale sur les 2 années :**
La **coefficient multiplicateur** $= (1+0,4)(1-0,3) = 0,98$.
Le **taux** $= 0,98 - 1 = -0,02 = -2\%$ $\neq 40\% - 30\% = 10\%$

Si une grandeur évolue avec un taux t_1 dans la 1ère période et d'un taux t_2 pendant la 2ème période, le coefficient multiplicateur entre le début et la fin de la 2ème période est $(1+t_1)(1+t_2)$.
Le taux global est $(1+t_1)(1+t_2) - 1 \neq t_1 + t_2$.

$$\begin{array}{ccccc} y_0 & \xrightarrow{1+t_1} & y_1 = y_0(1+t_1) & \xrightarrow{1+t_2} & y_2 = y_1(1+t_2) \\ y_0 & & \xrightarrow[(1+t_1)(1+t_2)]{\hspace{6cm}} & & y_2 = y_0(1+t_1)(1+t_2) \end{array}$$

Évolution à taux constant

Exemple :
Le chiffre d'affaire d'une entreprise a augmenté de 20% par an pendant 3 ans.

début :	200K€
fin 1ère année :	$200 \times 1,2 = 240$
fin 2ème année :	$200 \times 1,2 \times 1,2 = 200 \times (1,2)^2 = 288$
fin 3ème année :	$200 \times (1,2)^2 \times 1,2 = 200 \times (1,2)^3 = 345,6$

Si une grandeur a pour valeur initiale y_0 et évolue à un taux constant t chaque période, alors sa valeur après n périodes est

$$y_n = y_0(1+t)^n.$$

Le **coefficient multiplicateur global** est $(1+t)^n$ et le **taux global** $(1+t)^n - 1$.

Attention aux unités !

Lorsque vous travaillez avec une évolution à taux constant

$$y_n = y_0(1+t)^n,$$

prenez garde à l'unité de temps utilisée !

Si t est un taux	**mensuel**,	n doit être en	**mois**.
	annuel,		**années**.
	semestriel,		**semestres**.
	hebdomadaire,		**semaines**...

Exemple : 15 jours $= 0,5$ mois.

La formule $y_n = y_0(1+t)^n$ est valable aussi pour des valeurs de n non entières.

Test

Le nombre d'inscrits à un site internet augmente de 30% par mois.
Aujourd'hui, il y a 5 000 inscrits.
Combien y aura-t-il d'inscrits :

- dans 10 mois : $\boxed{5\ 000 \times 1,3^{10} = 68\ 929}$
- dans 2 ans : $\boxed{5\ 000 \times 1,3^{2\times 12} = 5\ 000 \times 1,3^{24} = 2\ 714\ 004}$
- dans 15 jours : $\boxed{5\ 000 \times 1,3^{\frac{1}{2}} = 5\ 701}$
  $\neq 5\ 000 \times (1 + \frac{0,3}{2}) = 5\ 750$

Remonter le temps

Exemple :
Le nombre d'inscrits à un site internet augmente de 30% par mois.
Aujourd'hui, il y a 5 000 inscrits.
Combien d'inscrits il y avait il y a 4 mois ?

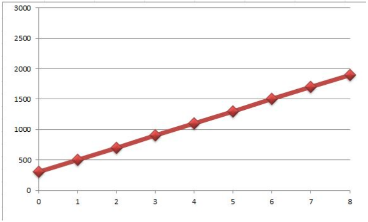
$y =$ nombre d'inscrits il y a 4 mois
$y(1,3)^4 = 5\ 000$
$y = 5\ 000 \times \frac{1}{(1,3)^4} = 5\ 000 \times 1,3^{-4} = 1\ 751$

La formule $y_n = y_0(1+t)^n$ est valable aussi pour n négatifs (correspondant à des temps passés).

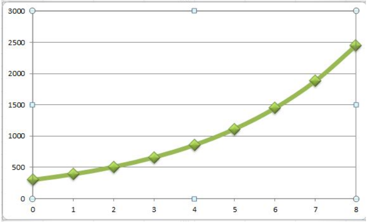
$$y_{-m} = y_0(1+t)^{-m} = \text{valeur } m \text{ périodes avant } y_0.$$

Graphiques : Évolution à incréments constants vs évolution à taux constant

Augmentation de 100€ par période
$y_n = 300 + 100n$
La courbe est une droite

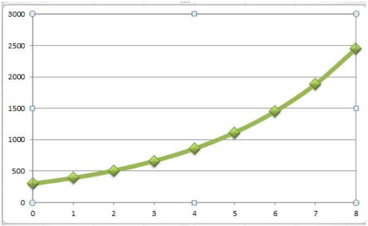


Augmentation de 30% par période
$y_n = 300(1,3)^n$
La courbe est "exponentielle"

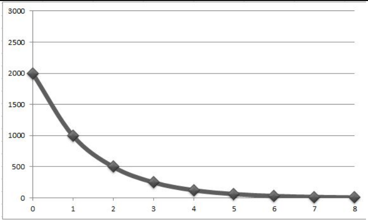


Graphiques : Taux positif et taux négatif

Augmentation de 30% par période
$t = +30\% > 0$
$y_n = 300(1,3)^n$
La courbe croît



Diminution de 50% par période
$t = -50\% < 0$
$y_n = 2000(0,5)^n$
La courbe décroît

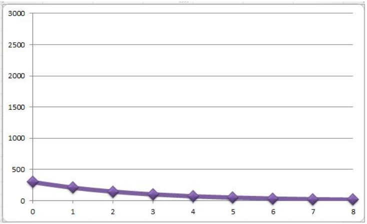


Test

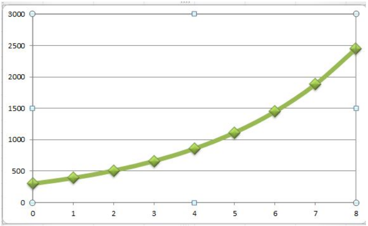
Le graphique $\boxed{3}$ ne peut pas représenter une évolution à taux constant.
En effet il décroît puis il croît.

Le taux est positif pour $\boxed{2 \text{ et } 4}$ car les courbes sont croissantes.

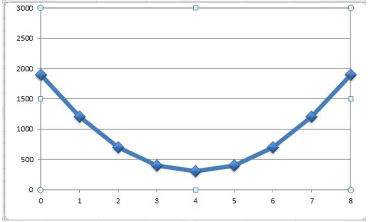
$\boxed{4}$ a le taux de croissance le plus grand. car elle croît le plus rapidement.



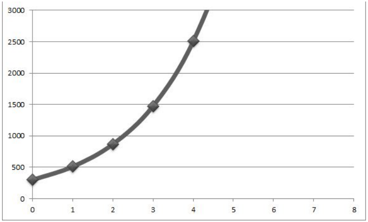
1.



2.



3.

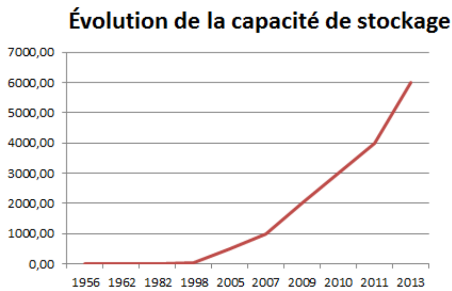


4.

Dans la vie réelle 1

Selon vous, les phénomènes suivants peuvent-ils être approchés par un modèle d'évolution à taux constant ?

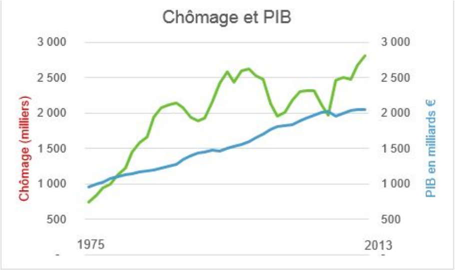
Évolution de la mémoire de stockage des disques durs (Wikipedia)



Vraisemblablement assez bien approché.

Il faut vérifier numériquement la précision du modèle.

Évolution du chômage et du PIB en France (le Monde)

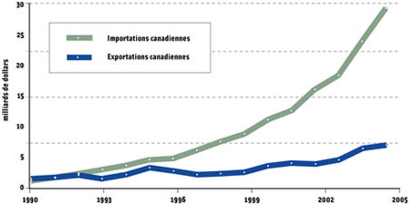


Non, ni l'un ni l'autre.

Dans la vie réelle 2

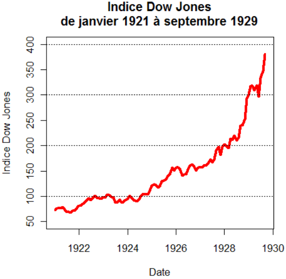
Selon vous, les phénomènes suivants peuvent-ils être approchés par un modèle d'évolution à taux constant ?

Importation (vert) et exportations (bleu) canadiennes



Vraisemblablement assez bien les importations.
Moins bien pour les exportations.

Indice Dow Jones de 1921 à 1929

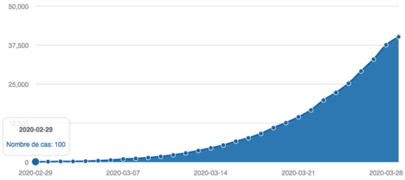


La tendance globale oui, mais pas les fluctuations locales.

Dans la vie réelle 3

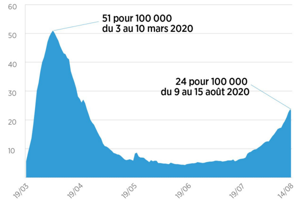
Selon vous, le phénomène suivant peut-il être approché par un modèle d'évolution à taux constant ?

Nombre de cas de COVID-19 en France en mars 2020



Vraisemblablement assez bien.

Nombre de cas de COVID-19 en France de mars à août 2020



Globalement non, mais oui sur certaines périodes.
Une évolution à taux constant est en général limitée dans le temps.

Section 3

Trouver le taux : équation $x^m = b$

Trouver le taux : équation $x^m = b$

Exemple. Le nombre d'inscrits d'un site internet était $y_0 = 5\ 500$ en 2010 et $y_7 = 12\ 158$ en 2017
Quel est le taux (moyen) de croissance <u>annuel</u> ?

t=taux annuel
On suppose une évolution à taux constant : $y_0(1+t)^n = y_n$. On connaît y_0 et y_7, et on cherche t.
$5\ 500(1+t)^7 = 12\ 158 \quad \Leftrightarrow \quad (1+t)^7 = \frac{12\ 158}{5\ 500} \cong 2,21$
Si $k = 1+t$ est le coefficient multiplicateur annuel :
$k^7 = 2,21 \quad \Leftrightarrow \quad (k^7)^{\frac{1}{7}} = 2,21^{\frac{1}{7}}$
$k^{7\frac{1}{7}} = 2,21^{\frac{1}{7}} \quad \Leftrightarrow \quad k^1 = 2,21^{\frac{1}{7}}$
$k = 2,21^{\frac{1}{7}} \cong 1,12$
$1 + t = 1,12$ donc le taux de croissance annuel est de $t = 0,12 = 12\%$.

Equation $x^m = b$

Si $x^m = b$ alors $x = b^{1/m}$.

Test

Résoudre les équations :

- $x^{10} = 5$
  $(x^{10})^{1/10} = 5^{1/10} \quad \Leftrightarrow \quad x = 5^{1/10} = 1,1746...$
- $x^{-10} = 5$
  $(x^{-10})^{\frac{1}{-10}} = 5^{\frac{1}{-10}} \quad \Leftrightarrow \quad x = 5^{-\frac{1}{10}} = 0,85133...$
- $x^{1,5} = 5$
  $(x^{1,5})^{\frac{1}{1,5}} = 5^{\frac{1}{1,5}} \quad \Leftrightarrow \quad x = 5^{\frac{1}{1,5}} = 2,9240..$
- $(a-3)^{1,5} = 5$
  $((a-3)^{1,5})^{\frac{1}{1,5}} = 5^{\frac{1}{1,5}} \quad \Leftrightarrow \quad a - 3 = 5^{\frac{1}{1,5}} = 2,9240..$
  $a = 2,9240.. + 3 = 5,9240..$

La population d'une ville a doublé ces 20 dernières années.
Quel est son taux moyen de croissance annuel ?

t = taux annuel de croissance

$y_0(1+t)^{20} = y_0 \times 2$

$(1+t)^{20} = 2$ donc $((1+t)^{20})^{\frac{1}{20}} = 2^{\frac{1}{20}}$

$1 + t = 2^{\frac{1}{20}} \cong 1,035$ donc $t = 1,035 - 1 = 0,035 = 3,5\%$

Taux équivalents

En pratique, on peut rencontrer diverses périodes de référence, et donc des taux hebdomadaires, mensuels, trimestriels, annuels... Comment faire pour convertir de tels taux ?

Exemple. Le chiffre d'affaire d'une entreprise augmente de 5% par **mois**. Quel est le taux de croissance **annuel** ?

Le taux mensuel est $t_m = 5\% = 0,05$. On cherche le taux annuel t_a.
Au bout d'un an, le coefficient multiplicateur est de $(1+t_m)^{12} = (1+t_a)$:

$$
\begin{array}{ccccccc}
y_0 & \xrightarrow[1+t_m]{} & y_0(1+t_m) & \xrightarrow[1+t_m]{} & \dots & \xrightarrow[1+t_m]{} & y_0(1+t_m)^{12} \\
y_0 & & & \xrightarrow[1+t_a]{\hspace{10em}} & & & y_0(1+t_a)
\end{array}
$$

Donc $1 + t_a = (1+0,05)^{12} \cong 1,80$
$t_a \cong 1,80 - 1 = 0,80 = 80\%$ $\qquad \neq 5\% \times 12 = 60\%$
On aurait aussi pu trouver le taux mensuel à partir du taux annuel :
$1 + t_m = (1+t_a)^{\frac{1}{12}}$.

Taux équivalents

Cette conversion fonctionne pour d'autres périodes de référence. Par exemple, 1 trimestre égale 3 mois, donc

$$(1 + t_t) = (1 + t_m)^3,$$

où t_t est le taux trimestriel et t_m le taux mensuel.

Taux équivalents

Deux taux sur des périodes des longueurs différentes sont équivalents s'ils décrivent la même évolution.
En particulier un taux mensuel t_m est équivalent à un taux annuel t_a si

$$1 + t_a = (1 + t_m)^{12}.$$

Le taux annuel n'est pas égal à 12 fois le taux mensuel ; en général, $t_a \neq 12t_m$. Si une méthode aussi simple fonctionnait, croyez bien qu'elle serait enseignée à la place !

Test

Calculer :

- le taux annuel t_a équivalent d'un taux mensuel de -5%
  $1 + t_a = (1 - 0,05)^{12} \cong 0,54$
  $t_a \cong 0,54 - 1 = -0,46 = -46\%$
- le taux mensuel t_m équivalent d'un taux annuel de 60%
  $(1 + t_m)^{12} = 1 + 0,60 = 1,6$
  $(1 + t_m) = 1,6^{1/12} \cong 1,04$
  $t_m \cong 1,04 - 1 = 0,04 = 4\%$

Section 4

Trouver la durée : équation $b^x = a$

Trouver la durée

Exemple : Le nombre d'inscrits à un site croît de 30% par an.
Dans combien de temps le nombre d'inscrits aura-t-il doublé ?

Soit y_n le nombre d'inscrits après n années. On a une évolution à taux constant :

$$y_n = y_0(1+t)^n = y_0 \times 1,3^n$$

Le coefficient multiplicateur après n années vaut $1,3^n$. On cherche n tel que ce coefficient multiplicateur vaille 2 :
$1,3^n = 2$
Comment résoudre cette équation ?

Logarithme décimal

Le **logarithme** (décimal) de x est le nombre a que $10^a = x$.
On note $a = \log(x)$. Il est bien défini si $x > 0$.

Exemples : $\log(100) = 2$ car $10^2 = 100$.
$\log(0,01) = -2$ car $10^{-2} = 0,01$.
$\log(2) = 0,301\ldots$ car $10^{0,301\ldots} = 2$.
Autrement dit : $10^{\log(x)} = x$.

Propriétés du logarithme

- $\log(1) = 0$,
- $\log(10) = 1$.

En effet, $10^{\log(1)} = 1 = 10^0$ donc $\log(1) = 0$, et $10^{\log(10)} = 10 = 10^1$ donc $\log(10) = 1$.

$\log(xy) = \log(x) + \log(y)$ pour $x,\ y > 0$.

En effet, $10^{\log(xy)} = xy = 10^{\log(x)}10^{\log(y)} = 10^{\log(x)+\log(y)}$.

$\log(x^y) = y\log(x)$ pour $x,\ y > 0$.

En effet, $10^{\log(x^y)} = x^y = (10^{\log(x)})^y = 10^{y\log(x)}$.

Test

Calculer sans calculatrice :

- $\log(10\ 000) = \boxed{4}$
- $\log(0,001) = \boxed{-3}$

Encadrer entre deux valeurs entières :

- $\boxed{2} < \log(579) < \boxed{3}$ car $100 = 10^2 < 579 < 1\ 000 = 10^3$
- $\boxed{5} < \log(579\ 000) < \boxed{6}$ car $100\ 000 = 10^5 < 579\ 000 < 1\ 000\ 000 = 10^6$

Logarithme et calculatrice

La plupart des calculatrice permettent de calculer d'autres logarithmes

- le logarithme en 10, noté souvent log
- le logarithme néperien, c'est-à-dire le logarithme dont la base est le nombre de Néper $\mathrm{e} = 2,718\dots$, noté ln.

Vérifiez quels logarithmes calcule votre calculette :

- Logarithme en base 10 :
  $\log(10) = 1$
- Logarithme en base e :
  $\ln(10) = 2,30258\dots$

Enfin, d'autres calculatrices permettent de calculer des logarithmes en toute base (touche $\log_a b$). Nous n'utiliserons pas cette notion.

Equation $b^x = a$

Exemple : Résoudre avec le logarithme :

$1,3^x = 2$

$\log(1,3^x) = \log(2)$

$x \log(1,3) = \log(2)$

$x = \frac{\log(2)}{\log(1{,}3)} \simeq \frac{0{,}6931}{0{,}2624} \simeq 2,64$

Equation $b^x = a$

Soient a et $b > 0$. Si $b^x = a$, alors

$$x = \frac{\log(a)}{\log(b)}.$$

Trouver la durée, bis

Exemple : Le nombre d'inscrits à un site croît de 30% par an.
Dans combien de temps le nombre d'inscrits aura-t-il doublé ?

Soit y_n le nombre d'inscrits après n années. On a une évolution à taux constant :

$$y_n = y_0(1+t)^n = y_0 \times 1,3^n$$

Le coefficient multiplicateur après n années vaut $1,3^n$. On cherche n tel que ce coefficient multiplicateur vaille 2 :
$1,3^n = 2$
On a $n = \frac{\log(2)}{\log(1,3)} \simeq 2,64$. Le nombre d'inscrit aura doublé dans $2,64$ ans, soit 2 ans et $12 \times 0,64 = 8$ mois.

Test

Parfois, on peut rencontrer des équations plus compliquées que $b^x = a$.
Dans ce cas, on peut essayer de se ramener à cette forme.
Résoudre les équations suivantes :

- $1,34^x = 2,56$
  $x = \frac{\log(2{,}56)}{\log(1{,}34)} = \frac{0{,}2927}{0{,}94} = 3,21$
  car
  $\log(1,34^x) = \log(2,56) \Leftrightarrow x \log(1,34) = \log(2,56) \Leftrightarrow x = \frac{\log(2{,}56)}{\log(1{,}34)}$
- $2 \times 1,34^y = 5,12$
  On se ramène d'abord à une équation de la forme étudiée. Pour cela, on divise chaque membre par 2 : $1,34^y = 2,56$
  $y = \frac{\log(2{,}56)}{\log(1{,}34)} = 3,21$
- La valeur d'une machine diminue de 20% par an. Dans combien de temps sa valeur sera réduite à la moitié ?
  $(1 - 0,20)^n = 0,5$ c'est-à-dire $0,8^n = 0,5$
  $n = \frac{\log(0{,}5)}{\log(0{,}8)} = 3,11$ ans $= 3$ ans et 1 mois