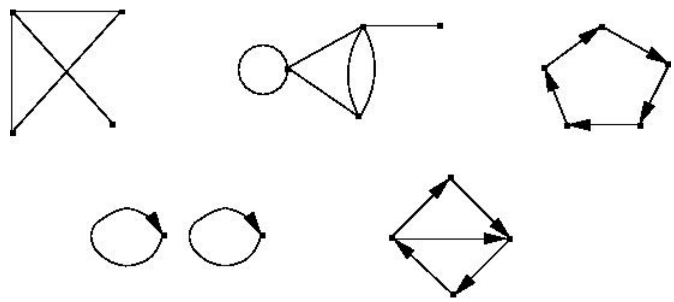
TD 03 : Matrices d'adjacence

Du graphe à la matrice, de la matrice au graphe

1. On se donne les cinq graphes (orientés ou non) suivants. Écrire leur matrice d'adjacence.



2. On se donne maintenant les matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Quand c'est possible, dessiner le graphe (non-orienté) dont elles sont les matrices d'adjacence.
   (b) On considère les matrices restantes. Quand c'est possible, dessiner le graphe orienté dont elles sont les matrices d'adjacence.

3. Écrire les matrices d'adjacence du graphe complet K_5, du graphe cyclique C_6 et du graphe complet biparti $K_{2,3}$. Plus généralement, que pouvez-vous dire des matrices d'adjacence des graphes K_n, C_n et $K_{n,m}$?

Manipulation de matrices

4. On se donne les deux matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Calculer les matrices $3A$, $-B$, $2A + B$, AB et BA.

5. Soit :

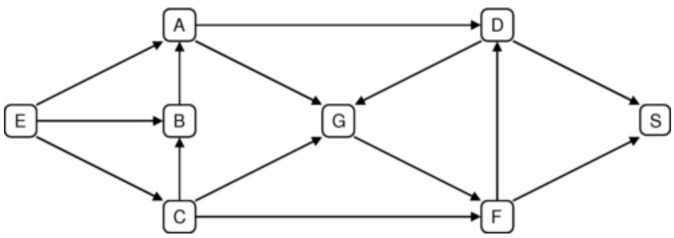
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calculer M^2, M^3 et M^4.
   (b) Calculer M^n pour tout $n \geq 0$.
   (c) Dessiner le graphe dont M est la matrice d'adjacence. Interpréter le résultat de la question précédente.

Dénombrement

6. Soit G un graphe orienté à n sommets, et soit M sa matrice d'adjacence.
   (a) Supposons que M^n soit non nul. Montrer que G contient un ou des cycles.
   (b) Que dire de la réciproque ?

7. Pour traverser une chaîne de montagnes, il faut passer par plusieurs cols, reliés entre eux par des voies ne pouvant être franchies que dans un seul sens. On donne ci-dessous le graphe associé à cette situation (E est le point d'entrée et S le point de sortie). L'office de tourisme cherche toutes les traversées qui partent de E et arrivent en S en 4,5 ou 8 étapes (une étape est le passage d'un col à un autre, ou du départ à un col, ou d'un col à l'arrivée).



Les cols étant classés dans l'ordre E, A, B, C, G, D, F, S, on note M la matrice d'adjacence du graphe.

(a) Calculer M^2, M^3 et M^4.
(b) Combien y a-t-il de chemins de longueur au plus 3 partant de E ?
(c) Combien de traversées peut-on faire en 4 étapes ? En 5 ? En 8 ?

8. On se donne les 4 lettres f, a, c et e. On veut former des mots à partir de cet alphabet.

(a) Combien y a-t-il de mots de longueur 5 ?

On impose maintenant les deux règles suivantes : deux lettres identiques ne se suivent jamais, et deux consonnes ne se suivent jamais.

(b) Combien y a-t-il de mots de longueur 5, commençant par f et finissant par e ?
(c) Combien y a-t-il de mots de longueur 5 commençant par f ?
(d) Combien y a-t-il de mots de longueur 5 au total ?
(e) Quelle proportion de ces mots n'a pas de e ?

9. Soit M la matrice d'adjacence du graphe complet à 4 sommets K_4. Soit N la matrice 4×4 dont tous les coefficients sont des 1.

(a) Montrer que $N^2 = 4N$ et $M = N - I$.
(b) Montrer par récurrence[1] que, pour tout $n \geq 0$,

$$M^n = \left(\frac{3^n - (-1)^n}{4}\right) N + (-1)^n I.$$

(c) Combien y a-t-il de chemins de longueur n ?
(d) Pouvait-on retrouver le résultat précédent sans passer par un calcul matriciel ?

[1]On pourra remarquer que $M^{n+1} = M^n \cdot M = M^n \cdot (N - I)$.