Examen - compléments de géométrie

Vendredi 2 décembre 2016 - durée : 2h

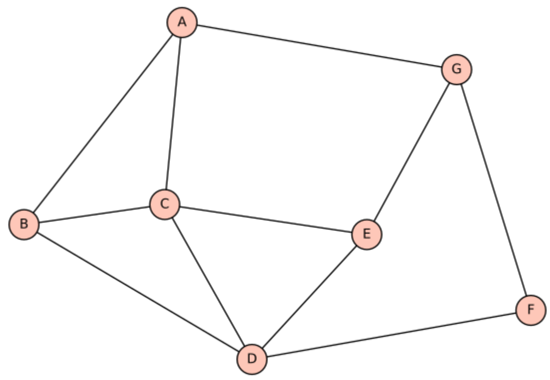
Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.
On prendra soin de justifier proprement les réponses.

1. **QUESTIONS DE COURS**

   (a) Dessiner un graphe avec au moins 4 sommets, qui soit à la fois eulérien et hamiltonien.
   (b) Rappeler le théorème des poignées de main.
   (c) Soit P un polyèdre convexe, avec 12 sommets et 20 faces. Combien P a-t-il d'arêtes ?

2. **RANDONNÉE(S) DANS UN PARC**

   Le graphe $\mathcal{G}$ ci-dessous représente la carte d'un parc national : les sommets sont des points d'intérêt, et les arêtes sont des routes qu'un randonneur peut emprunter. L'entrée du parc correspond au sommet A.



   (a) Le graphe $\mathcal{G}$ est-il eulérien ?

   L'office du tourisme a décidé de créer des parcours de randonnée dans ce parc.

   (b) Dans un premier temps, il est décidé d'organiser un parcours qui parte et revienne en A, et qui passe par tous les sommets du graphe une et une seule fois. Est-ce possible ?
   (c) Pour les randonneurs plus chevronnés, on veut trouver un parcours qui parte et qui revienne en A, et qui emprunte chaque route une et une seule fois. Expliquer pourquoi ce n'est pas possible.
   (d) Par désarroi, l'office du tourisme décide d'organiser plusieurs parcours de randonnée, qui ne reviennent plus nécessairement à leur point de départ. Il est cependant décidé que :
       - Toute route appartient à un et un seul parcours ;
       - Aucun parcours ne doit emprunter deux fois la même route.

       Combien de parcours différents faudra-t-il prévoir, au minimum ?

   La création de parcours de randonnée s'étant révélée plus compliquée que prévue, il a finalement été décidé de laisser les randonneurs se débrouiller avec la carte du parc.

   (e) Écrire la matrice d'adjacence M du graphe $\mathcal{G}$.
   (f) Calculer M^2.

   À l'aide de l'ordinateur, on calcule (les lignes et colonnes sont indicées de A à G, dans l'ordre alphabétique) :

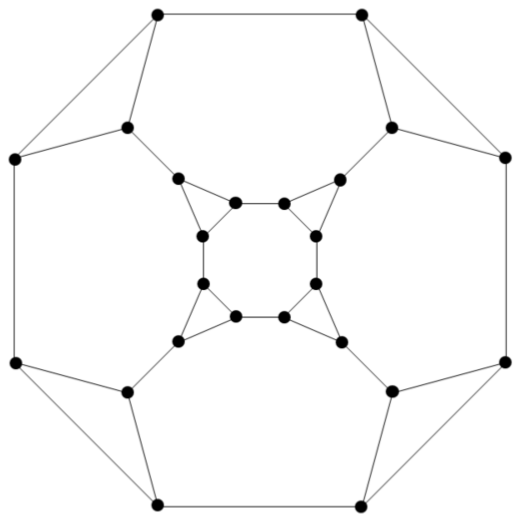
$$M^6 = \begin{pmatrix} 178 & 172 & 196 & 196 & 184 & 111 & 106 \\ 172 & 201 & 234 & 206 & 192 & 120 & 135 \\ 196 & 234 & 302 & 273 & 205 & 125 & 194 \\ 196 & 206 & 273 & 278 & 186 & 105 & 184 \\ 184 & 192 & 205 & 186 & 207 & 131 & 101 \\ 111 & 120 & 125 & 105 & 131 & 86 & 57 \\ 106 & 135 & 194 & 184 & 101 & 57 & 144 \end{pmatrix}.$$

   (g) Une randonneuse veut aller de l'entrée du parc A au Grand Séquoïa, qui se situe au point D. Elle veut parcourir exactement 6 routes. Combien a-t-elle de choix de parcours possibles ?

(h) Un autre randonneur veut parcourir 6 routes en partant de l'entrée du parc A, mais se moque de l'endroit où sa randonnée finira. Combien a-t-il de choix de parcours possibles ?

3. **CUBE TRONQUÉ**

On considère le graphe G du cube tronqué, représenté ci-dessous :



(a) Combien le graphe G a-t-il de sommets ? De faces ? D'arêtes ? Vérifier que la formule d'Euler est satisfaite.
(b) Combien de faces de G ont 3 côtés ? 8 côtés ? Ne pas oublier la face extérieure du graphe !
(c) Sans utiliser la question suivante, combien son graphe dual G^* a-t-il de sommets, de faces et d'arêtes ?
(d) Dessinez (sur votre feuille, et non sur l'énoncé) le graphe dual du cube tronqué.
(e) Écrire la suite des degrés de G^*. Quel est le rapport avec la réponse à la question b) ? Expliquer.

4. **RÉSEAU DE CO-EXPRESSION DE GÈNES**

On mesure chez l'homme l'expression de différents gènes g_1, g_2, ..., g_8. Si l'expression de deux gènes est très corrélée[1], on peut penser que ces deux gènes participent au même processus biologique. Le but est de classer les gènes en fonction des processus auxquels ils participent. Pour cela, on mesure ces corrélations, et on ne garde que les corrélations suffisamment fortes. On obtient le tableau suivant (les lignes et colonnes sont indicées de g_1 à g_8) :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Dessiner le graphe non orienté G dont M est la matrice d'adjacence.
(b) Combien G a-t-il de composantes connexes ?

5. **QUESTION BONUS**

Cette question n'est à traiter que si le reste du sujet est terminé.

(a) Soit G un graphe à $n \geq 3$ sommets. Supposons que G possède un cycle qui soit à la fois eulérien et hamiltonien. Montrer que G est le graphe cyclique C_n.

Barème indicatif : 3 - 8 - 6 - 3 - (+2) points.

[1] C'est-à-dire que deux gènes on tendance à s'exprimer en même temps