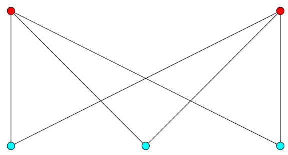
Corrigé d'examen - compléments de géométrie

Mardi 3 novembre 2014

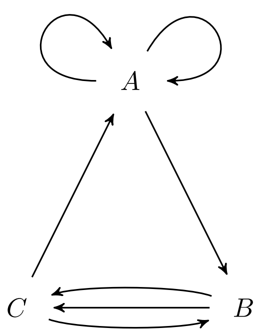
1. Questions de cours :
   (a) Le graphe bipartite $K_{2,3}$ est le suivant :



   (b) Un cycle hamiltonien sur G est un cycle qui passe une et une seule fois par chaque sommet de G.
   (c) D'après la formule d'Euler, pour un graphe planaire connexe,
   $$s - a + f = 2.$$
   (d) Soit s le nombre de sommets du polyèdre, a son nombre d'arêtes, et f son nombre de faces. Soit g son genre. D'après la formule d'Euler pour les polyèdres,
   $$s - a + f = 2 - 2g,$$
   d'où :
   $$2 - 2g = 30 - 62 + 30 = -2.$$
   Finalement, $2g = 4$, donc le polyèdre est de genre 2.

2. (a) D'après le théorème des poignées de mains, la somme des degrés des sommets d'un graphe est le double du nombre d'arêtes de ce graphe. En particulier, la somme des degrés des sommets d'un graphe est toujours paire.
   Ici, la somme des entiers de la suite vaut $6 \times 1 + 3 + 3 \times 4 = 21$, ce qui est impair. Il n'existe donc pas de graphe dont cette suite est la suite des degrés.
   (b) Supposons qu'une telle molécule existe. Soit G le graphe dont les sommets sont les atomes de la molécule, et dont les arêtes sont les liaisons inter-atomiques. Autrement dit, deux sommets sont reliés par un nombre d'arêtes égal au nombre de liaisons entre les deux atomes correspondants.
   D'après les trois conditions de l'énoncé, une telle molécule aurait trois sommets de degré 4 (les trois atomes de carbone, chacun relié à 4 autres atomes), un sommet de degré 3 (l'atome d'azote, relié à 3 autres atomes), et six sommets de degré 1 (les six atomes d'hydrogène, chacun relié à 1 autre atome). La suite des degrés de ce graphe serait donc $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 4, 4, 4)$. Mais, d'après la question précédente, aucun graphe n'a une telle suite des degrés. Il n'existe donc pas de molécule de formule brute C_3H_6N vérifiant ces conditions[1].

3. (a) La matrice M est à coefficients entiers positifs. Elle est donc la matrice d'adjacence d'un graphe. Si le graphe correspondant était non orienté, alors la matrice M serait symétrique. Ce n'est pas le cas ici : $M_{12} = 1$ et $M_{21} = 0$ sont différents. M est donc la matrice d'adjacence d'un graphe orienté, mais pas d'un graphe non-orienté.
   (b) Comme vu à la question précédente, le graphe G est nécessairement orienté. Il s'agit du graphe suivant :



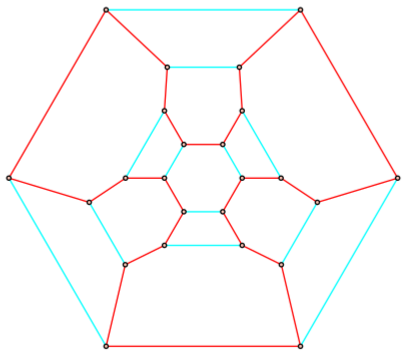
[1] Il peut cependant exister des molécules de la forme C_3H_6N, CH_3, etc. si l'un des atomes participe à moins de liaisons inter-atomiques - par exemple, un atome de carbone avec 3 liaisons. Ceci est possible seulement si l'un des atomes porte une charge (par exemple CH_3^+), ou est un radical libre (et donc instable).

(c) On trouve :

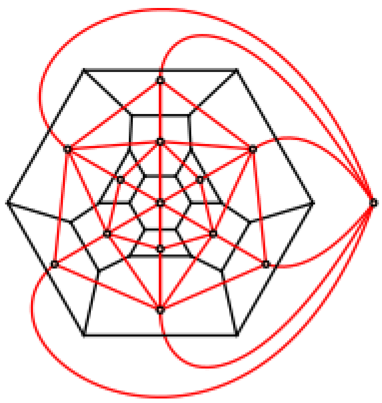
$$M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(d) Si on fixe deux sommets (potentiellement identiques) du graphe i et j, alors le nombre de chemins de longueurs 2 dans G qui partent de i et arrivent en j est donné par $(M^2)_{ij}$. Par exemple, si $i = A$ et $j = B$, on trouve 2 chemins de longueur 2 partant de A et arrivant en B.
Le nombre de chemins total s'obtient en ajoutant les entiers $(M^2)_{ij}$ pour tous les choix possibles de point de départ i et de point d'arrivée j ; c'est donc la somme des coefficients de M^2. Il y a donc $4+2+2+2+2+0+2+1+2 = 17$ chemins de longueur 2 dans le graphe G.

4. (a) Ce graphe a $s = 24$ sommets, $a = 36$ arêtes et $f = 14$ faces (n'oubliez pas la face infinie !). On trouve $s - a + f = 24 - 36 + 14 = 2$, ce qui est bien le résultat prédit par la formule d'Euler.
(b) Un graphe est eulérien si et seulement s'il est connexe, et si le degré de chaque sommet est pair. Le graphe G est connexe, mais il a un sommet de degré trois[2]. Il n'est donc pas eulérien.
(c) Un cycle hamiltonien (parmi plusieurs possible) est, par exemple :

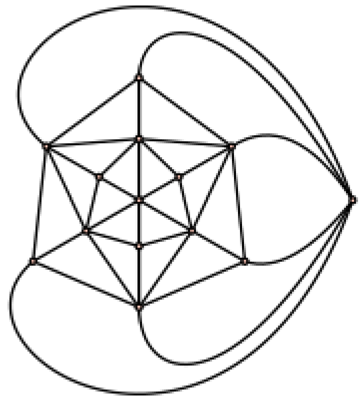


(d) La représentation duale s'obtient de la façon suivante :



Si l'on efface le graphe G, on obtient le résultat final :

[2]En fait, tous ses sommets sont de degré 3.

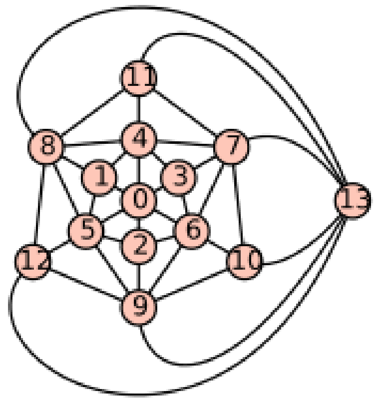


(e) Soit s^* le nombre de sommets de G^*, a^* son nombre d'arêtes, et f^* son nombre de faces. Alors :

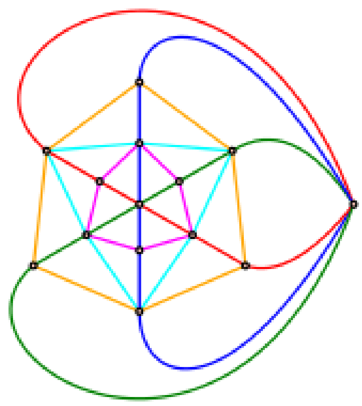
$$\begin{array}{ccccc} s^* & = & f & = & 14 \ ; \\ a^* & = & a & = & 36 \ ; \\ f^* & = & s & = & 24. \end{array}$$

Le graphe dual G^* a donc 14 sommets, 36 arêtes et 24 faces.

(f) Chaque sommet du graphe dual est de degré 4 ou 6. Cela ce voit sur le graphe obtenu dans la question (d) ; c'est aussi une reformulation du fait que toutes les faces de G ont 4 ou 6 côtés. Le graphe G^* est de plus connexe. Il admet donc un cycle eulérien.
Dessiner ce cycle est graphiquement très délicat. Cette partie de la question n'a pas été traitée, et ne rentre pas en compte dans le calcul final de la note. Malgré tout, voici une recette pour déterminer un cycle eulérien. On numérote les sommets du graphe G^* de la façon suivante :



On peut facilement regrouper les arêtes en six cycles :



Dans ce qui suit, on écrit un cycle comme la suite des sommets par lequels il passe (ce qui est possible, le graphe considéré étant simple). Si une arête appartient à un cycle, disons, orange, alors on colorie le sommet d'arrivée en orange. Les six cycles ci-dessus sont donc les cycles $(0, 1, 8, 13, 10, 6, 0)$, $(0, 2, 9, 13, 11, 4, 0)$, $(0, 3, 7, 13, 12, 5, 0)$, $(3, 4, 1, 5, 2, 6, 3)$, $(7, 4, 8, 5, 9, 6, 7)$ et $(7, 11, 8, 12, 9, 10, 7)$. En concaténant ces cycles, on obtient un cycle eulérien, par exemple :

$$(0, 1, 8, 13, 10, 6, 0, 2, 9, 13, 11, 4, 0, 3, 4, 1, 5, 2, 6, 3, 7, 4, 8, 5, 9, 6, 7, 11, 8, 12, 9, 10, 7, 13, 12, 5, 0).$$