

Examen - compléments de géométrie

Mardi 3 novembre 2014 - durée : 1h

*Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.
On prendra soin de justifier proprement les réponses.*

1. Questions de cours :

- (a) Dessiner le graphe bipartite $K_{2,3}$.
- (b) Soit G un graphe. Qu'est-ce qu'un cycle hamiltonien sur G ?
- (c) Soit G un graphe planaire connexe, et soit \mathcal{G} une représentation planaire de G . Soient s , a et f respectivement le nombre de sommets, de faces et d'arêtes de \mathcal{G} . Comment ces trois quantités sont-elles reliées ?
- (d) Un polyèdre connexe a 30 sommets, 62 arêtes et 30 faces. Quel est son genre ?

 2. On veut savoir s'il existe une molécule de formule brute C_3H_6N , telle que les trois conditions suivantes soient remplies simultanément :

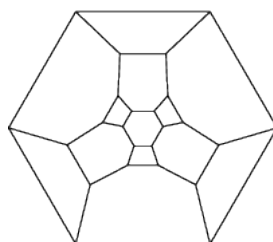
- chaque atome de Carbone est lié à 4 autres atomes (les liaisons multiples étant comptées avec multiplicité) ;
- chaque atome d'Azote est lié à 3 autres atomes (les liaisons multiples étant comptées avec multiplicité) ;
- chaque atome d'Hydrogène est lié à un autre atome.

- (a) Existe-t-il un graphe dont la suite des degrés est $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 4, 4, 4)$?
- (b) Modélisez le problème initial en termes de graphes (c'est-à-dire, définissez un graphe, et traduisez les propriétés exigées de la molécule en propriétés de ce graphe). Concluez.

3. On considère la matrice carrée suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Cette matrice est-elle la matrice d'adjacence d'un graphe orienté ? Non-orienté ?
- (b) Dessinez le graphe G dont M est la matrice d'adjacence. Si possible, faire en sorte que G soit non-orienté.
- (c) Calculez M^2 .
- (d) À partir de la question précédente, calculez le nombre total de chemins de longueur 2 sur le graphe G .

 4. Soit G le graphe de l'octaèdre tronqué, représenté ci-dessous :


- (a) Combien ce graphe a-t-il de sommets ? De faces ? D'arêtes ? La formule d'Euler est-elle satisfaite ?
- (b) Ce graphe est-il eulérien ? Si oui, dessinez un cycle eulérien.
- (c) Dessinez un cycle hamiltonien sur G .
- (d) Dessinez le graphe dual G^* de G .
- (e) Retrouvez, sans calcul, le nombre de sommets, de faces et d'arêtes de G^* .
- (f) Le graphe G^* est-il eulérien ?

 Barème indicatif : 4 - 3 - 6 - 7 points.