

Devoir maison**Fonctions : injectivité, surjectivité**

1. Question de cours.
 - (a) Qu'est-ce qu'une fonction injective ? Surjective ?
 - (b) Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui soit injective mais pas surjective.
 - (c) Donner un exemple de fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui soit surjective mais pas injective.
2. Les fonctions suivantes sont-elles des bijections ? Si oui, donner leur inverse.

(a) La fonction :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & [-1, 1] \\ x & \mapsto & \sin(x) \end{cases} ;$$

(b) La fonction¹ :

$$g : \begin{cases} \{0, 1, 2, 3, 4\} & \rightarrow & \{0, 1, 2, 3, 4\} \\ x & \mapsto & 2x \text{ [5]} \end{cases} .$$

Opérations sur les ensembles

3. Soit Ω un ensemble, et soient A et B des parties de Ω . Montrer par double inclusion que $A = (A \cap B) \cup (A - B)$.
4. Soit Ω un ensemble, et soient A, B et C des parties de Ω . Posons $D(A, B, C) := (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)$
 - (a) Tracer le diagramme de Venn correspondant à $D(A, B, C)$.
 - (b) En utilisant un tableau, montrer que $2 \cdot 1_{D(A, B, C)} = 1_A + 1_B + 1_C - 1_{A \Delta B \Delta C}$.
 - (c) En déduire que :

$$|D(A, B, C)| \leq \frac{|A| + |B| + |C|}{2}.$$

Dénombrement

5. Question de cours. Soient A et B deux ensembles finis tels que $|A| = 4$ et $|B| = 6$.
 - (a) Combien y a-t-il de parties à deux éléments de A ?
 - (b) Combien y a-t-il de fonctions de A dans B ? Parmi elles, combien sont des injections, et combien des surjections ?
6. Calculer $\binom{5}{n}$ pour $n \in \{0, 1, \dots, 5\}$.
7. Combien les mots suivants ont-ils d'anagrammes : COMPTE, CUBE, DODECAEDRE ? Parmi les anagrammes de DODECAEDRE, combien commencent par la lettre C, et combien par la lettre D ?

1. On rappelle que si k et n sont des entiers, $n \neq 0$, alors $k \text{ [} n \text{]}$ désigne le reste dans la division Euclidienne de k par n .