

Géométrie (2h)

Exercice 1. Soit \mathbf{R}^3 muni de ses coordonnées (x, y, z) . Soient $L = (x = y = 0)$ l'axe vertical et $\Gamma = (z = 0, x^2 + y^2 = 1)$, $\Gamma' = (z = 0, (x - 2)^2 + y^2 = 1)$ deux cercles horizontaux.

- Calculer $\pi_1(\mathbf{R}^3 \setminus L)$.
- Soient j et j' les injections canoniques de Γ et Γ' dans $\mathbf{R}^3 \setminus L$. Calculer $j_*(\pi_1(\Gamma))$ et $j'_*(\pi_1(\Gamma'))$.
- Existe-t-il un homéomorphisme f de \mathbf{R}^3 tel que $f(\Gamma) = \Gamma'$ et $f(L) = L$?

Exercice 2. Soit la bouteille de Klein $K = Q/\mathcal{R}$ avec $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ et \mathcal{R} la relation d'équivalence $(x, 0) \sim (x, 1)$ et $(0, y) \sim (1, 1 - y)$ ($0 \leq x, y \leq 1$).

- Montrer que $\pi_1(K)$ a pour présentation $\langle a, b \mid aba^{-1}b \rangle$ (écrire $K = U_1 \cup U_2$ avec $U_1 = Q^*/\mathcal{R}$ et $U_2 = \overset{\circ}{Q}$, où Q^* est le carré privé de son centre).

Soit G le sous-groupe du groupe des homéomorphismes de \mathbf{R}^2 engendré par s et t où $s(x, y) = (x + 1, -y)$ et $t(x, y) = (x, y + 1)$.

- Montrer que $s \circ t = t^{-1} \circ s$. En déduire que tous les éléments de G s'écrivent $s^n \circ t^m$ avec n, m dans \mathbf{Z} .
- Montrer que G agit proprement et librement sur \mathbf{R}^2 .
- Soit $p : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2/G$. Montrer que $p|_Q$ est surjective. En déduire que K s'identifie à \mathbf{R}^2/G .
- Montrer que $\pi_1(K)$ est isomorphe à G .

Exercice 3. Soit $P = S^2/\{\pm Id\}$ le plan projectif. Soit $[N] = [S]$ la classe du pôle Nord (c'est aussi celle du pôle Sud) dans P . On pose $X = P_1 \amalg P_2/[N_1] \sim [N_2]$ l'espace obtenu en recollant deux copies de P par leurs pôles.

- Quel est le revêtement universel de P ? Calculer $\pi_1(P)$.
- Montrer que $\pi_1(X) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} * \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.
- Soient a et b les générateurs des deux copies de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Décrire les éléments de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} * \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.
- Soit $\tilde{X} = \amalg_{n \in \mathbf{Z}} (S^2)_n / N_n \sim S_{n+1}$ l'espace obtenu en recollant une infinité de copies de la sphère par leurs pôles comme indiqué. Montrer que \tilde{X} est simplement connexe. Expliciter la projection de \tilde{X} sur X qui en fait le revêtement universel.
- Dessiner le revêtement connexe de X correspondant au sous-groupe engendré par ab dans $\pi_1(X)$. Expliciter sa projection sur X .