PARIS SUD ORSAY

GEOMETRIE

Exercice 1. Soit γ une courbe fermée simple dans S^2 obtenue comme réunion de deux arcs (chemins injectifs) γ_1, γ_2 se coupant aux pôles, $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ et $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \{N, S\}$. On pose $U_i = S^2 \setminus \gamma_i$, $X = U_1 \cup U_2 = S^2 \setminus \{N, S\}$ et $U_0 = U_1 \cap U_2 = S^2 \setminus \gamma$. On veut voir que U_0 n'est pas connexe. Dans la suite on suppose U_1 et U_2 connexes (d'ailleurs la non-connexité de U_1 ou U_2 entraîne celle de U_0). On raisonne par l'absurde en supposant U_0 connexe.

a) Vérifier que $\pi_1(X)$ est engendré par les deux sous-groupes $(j_1)_*(\pi_1(U_1))$ et $(j_2)_*(\pi_1(U_2))$ (j_i injection canonique de U_i dans X).

b) Soit δ un lacet dans $\mathbf{R}^2 \setminus \alpha$ où α est un arc joignant 0 à l'infini. Montrer que δ est homotope à un lacet constant dans $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ (considérer $\delta(t) - \alpha(s)$).

c) En déduire que les sous-groupes $(j_1)_*(\pi_1(U_1))$ et $(j_2)_*(\pi_1(U_2))$ sont triviaux. Conclure.

Exercice 2. Soit X un espace topologique connexe par arcs et p, q deux de ses points. On considère l'espace Y obtenu en identifiant p à q dans X : $Y = X/_{p\sim q}$. On veut calculer $\pi_1(Y)$ en fonction de $\pi_1(X)$. On fait l'hypothèse qu'il existe dans X un arc α (chemin injectif) joignant p à q. On suppose en plus qu'il existe dans X un voisinage ouvert U de α se rétractant par déformation sur α et que $U \setminus \alpha$ est connexe par arcs.

a) Vérifier que U est simplement connexe.

b) En écrivant $X = (X \setminus \alpha) \cup U$ montrer que $\pi_1(X)$ est isomorphe au quotient $\pi_1(X \setminus \alpha)/H$ où H est le sous-groupe distingué engendré par $j_*(\pi_1(U \setminus \alpha))$ (j injection canonique de $U \setminus \alpha$ dans $X \setminus \alpha$).

c) Vérifier que $\pi_1(U/_{p\sim q}) = Z$.

d) En écrivant $Y = (X \setminus \alpha) \cup (U/_{p\sim q})$ montrer que $\pi_1(Y)$ est isomorphe au produit libre $(\pi_1(X \setminus \alpha)/H) * \mathbf{Z}$ donc à $\pi_1(X) * \mathbf{Z}$.

e) Premier exemple $X = S^2$. Dessiner Y. Calculer $\pi_1(Y)$.

f) Soit $\tilde{Y} = (\coprod_{n\in\mathbf{Z}} S^2_n)/_{p_n\sim q_{n+1}}$. Dessiner $\tilde{Y}$. Montrer que $\tilde{Y}$ est simplement connexe. Expliciter la projection qui en fait le revêtement universel de Y.

g) Décrire tous les revêtements connexes de Y à isomorphisme près. Les dessiner et expliciter leur projection.

h) Deuxième exemple $X = T^2$. Dessiner Y. Calculer $\pi_1(Y)$. Expliciter un revêtement connexe non galoisien de degré 3 de Y ainsi que sa projection.