PARIS SUD ORSAY

GEOMETRIE

Exercice 1. Soit $\mathbf{R}^3$ muni de ses coordonnées (x, y, z). On pose $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Soient l'axe vertical $L = (x = 0, y = 0)$ et le cercle horizontal $\Gamma = (z = 0, r = 2)$.

a) Calculer le groupe fondamental de $\mathbf{R}^3 \setminus (L \cup \Gamma)$ (on pourra montrer que $\mathbf{R}^3 \setminus (L \cup \Gamma)$ se rétracte par déformation sur le tore de révolution $(r-2)^2 + z^2 = 1$).

b) Calculer le groupe fondamental de $\mathbf{R}^3 \setminus L$.

c) Montrer que $\pi_1(\mathbf{R}^3 \setminus \Gamma)$ est isomorphe à $\mathbf{Z}$ (on pourra remarquer que $\mathbf{R}^3 \setminus \Gamma = C \cup (\mathbf{R}^3 \setminus (L \cup \Gamma))$ où C est le cylindre vertical $r < 1$).

d) En déduire le calcul du groupe fondamental de $\mathbf{R}^3 \setminus (L' \cup \Gamma)$ où L' est la droite verticale $(x = 4, y = 0)$.

e) Existe-t-il un homéomorphisme f de $\mathbf{R}^3$ tel que $f(\Gamma) = \Gamma$ et $f(L) = L'$?

Exercice 2. Un *graphe* (fini connexe) est un espace compact connexe Γ avec une partie finie $S \subset \Gamma$, les *sommets*, telle que $\Gamma \setminus S$ a un nombre fini de composantes connexes homéomorphes à $]0, 1[$, les *arêtes*. Enfin, si a est une arête, son bord $\overline{a} \setminus a$ (ses *extrémités*) consiste en un ou deux sommets. On note $\chi(\Gamma) =$ nombre de sommets - nombre d'arêtes. On note Γ_a le graphe obtenu en écrasant une arête a à deux extrémités sur un point.

a) Vérifier que $\chi(\Gamma_a) = \chi(\Gamma)$. Calculer $\chi(\Gamma)$ si Γ est un bouquet de g cercles.

b) En déduire qu'un graphe Γ a le type d'homotopie d'un bouquet de g cercles avec $g = 1 - \chi(\Gamma)$ (on admet que Γ_a a le même type d'homotopie que Γ).

Soit maintenant $p : E \to \Gamma$ un revêtement connexe de degré d du graphe Γ.

c) Soit a une arête quelconque de Γ. Vérifier que $p : E|_a \to a$ est un revêtement trivial de degré d.

d) En déduire que E est encore un graphe Γ' et que $\chi(\Gamma') = d\ \chi(\Gamma)$.

Voici une application de ce qui précède.

e) Montrer qu'un sous-groupe d'indice d d'un groupe libre à g générateurs est un groupe libre à $d(g - 1) + 1$ générateurs.