

## TD 05 : Sous-variétés différentielles

**Calcul différentiel, immersions et submersions**
**1. CALCUL DIFFÉRENTIEL DANS  $M_n(\mathbb{R})$** 

Soit  $n \geq 1$ . On munit  $\mathbb{R}^n$  d'une norme quelconque, et  $E := M_n(\mathbb{R})$  de la norme d'opérateurs :

$$\|A\| := \sup_{v \in \mathbb{R}^n : \|v\| \leq 1} \|Av\|.$$

On rappelle que cette norme fait de  $E$  une algèbre de Banach :  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$  pour tous  $A$  et  $B$  dans  $E$ . On note de plus  $U := GL_n(\mathbb{R})$ .

(a) Calculer la différentielle de l'application :

$$f_1 : \begin{cases} E \times E & \rightarrow E \\ (A, B) & \mapsto AB \end{cases}.$$

(b) En déduire la différentielle de l'application :

$$f_2 : \begin{cases} E & \rightarrow E \\ A & \mapsto A^2 \end{cases}.$$

On s'intéresse maintenant à l'application inverse :

$$f : \begin{cases} U & \rightarrow U \\ A & \mapsto A^{-1} \end{cases}.$$

(c) Montrer que  $U$  est un ouvert dense de  $E$  et que  $f$  est analytique sur  $U$ .

(d) Montrer que, pour toute matrice  $M \in E$  telle que  $\|M\| < 1$ , la matrice  $(I - M)$  est inversible et :

$$(I - M)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} M^k.$$

(e) En déduire la différentielle de  $f$ .

Pour finir, on s'intéresse à l'application  $\det : E \rightarrow \mathbb{R}$ .

(f) Montrer que  $\det$  est analytique sur  $E$ .

(g) Calculer  $D_I \det$  (on pourra calculer les dérivées partielles de  $\det$  dans une base bien choisie).

(h) En déduire la différentielle de  $\det$  sur  $U$ , puis sur  $E$ .

**2. ENSEMBLES DE NIVEAU**

On pose :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto x^2 + y^2 - z^2 \end{cases}.$$

(a) En quels points  $f$  est-elle une submersion ?

(b) Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on pose  $H_f(t) := f^{-1}(\{t\}) \subset \mathbb{R}^3$ . Montrer que  $\{H_f(t) : t \in \mathbb{R}\}$  forme une partition de  $\mathbb{R}^3$ .

(c) Quelles sont les valeurs critiques et régulières de  $f$  ?

(d) Dessiner  $H_f(-1)$  et  $H_f(1)$ . Que se passe-t-il pour les valeurs critiques ?

On pose maintenant :

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2 + z^2 \end{cases}.$$

(e) Déterminer les points en lesquels ou bien  $g$  n'est pas dérivable, ou bien  $Dg$  s'annule.

(f) Dessiner  $H_g(1/4)$  (indice : regarder d'abord ce qu'il se passe dans  $\mathbb{R}_+ \times \{0\} \times \mathbb{R}$ , puis utiliser le fait que  $H_g(1/4)$  est une surface de révolution).

(g) Pour quelles valeurs de  $t$  l'espace  $H_g(t)$  est-il une sous-variété ?

### 3. PARAMÉTRISATION DE SPHÈRES

Le but de cet exercice est de paramétrer les sphères de dimension 1, 2 et 3. On commence par la dimension 1, en posant :

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto (\cos(x), \sin(x)) \end{cases} .$$

(a) Montrer que  $f_1$  est une immersion.

Maintenant, on étudie la dimension 2 et aux coordonnées sphériques. On pose :

$$f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto (\cos(x) \cos(y), \sin(x) \cos(y), \sin(y)) \end{cases} .$$

(b) Vérifier que l'image de  $f_2$  est la sphère unité  $\mathbb{S}_2$ .

(c) Déterminer le rang de  $D_{(x,y)} f_2$  pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . En quels points  $f_2$  est-elle une immersion ?

Pour tout  $n \geq 1$ , il existe des coordonnées sphériques généralisées qui paramètrent la sphère unité de dimension  $n$ . Il peut d'ailleurs être instructif de trouver la formule correspondante. Cependant, il existe une autre paramétrisation intéressante en dimension 3, la paramétrisation de Hopf. On pose :

$$f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z) & \mapsto (\cos(x) \cos(z), \sin(x) \cos(z), \cos(y) \sin(z), \sin(y) \sin(z)) \end{cases} .$$

(d) Vérifier que l'image de  $f_3$  est la sphère unité  $\mathbb{S}_3$ .

(e) En quels points  $f_3$  est-elle une immersion ?

## Sous-variétés différentielles

### 4. UNE IMMERSION INJECTIVE NON PROPRE

On cherche à construire une immersion injective dont l'image n'est pas une sous-variété. Soient  $0 < r < R$ . On pose :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, \varphi) & \mapsto ((R + r \cos(\varphi)) \cos(\theta), (R + r \cos(\varphi)) \sin(\theta), r \sin(\varphi)) \end{cases} .$$

(a) Montrer que  $f$  est une immersion. Dessiner son image.

(b) Montrer que  $f$  passe au quotient en une application continue injective  $\tilde{f}$  de  $\mathbb{R}^2 / (2\pi\mathbb{Z})^2$  dans  $\mathbb{R}^3$ .

Dans la suite, on notera  $\pi$  la projection canonique de  $\mathbb{R}^2$  sur  $\mathbb{R}^2 / (2\pi\mathbb{Z})^2$ . On se donne maintenant un nombre  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , et on pose :

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto t(1, \alpha) \end{cases} .$$

(c) Montrer que  $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

(d) En déduire que  $\pi \circ g$  est injective, et que son image est dense dans  $\mathbb{R}^2 / (2\pi\mathbb{Z})^2$ .

(e) En déduire finalement que  $f \circ g$  est une immersion injective, dont l'image n'est pas une sous-variété.

### 5. COURBES ELLIPTIQUES

Pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , posons  $H(a, b) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = x^3 + ax + b\}$ . On définit le *discriminant* comme étant la quantité  $\Delta(a, b) := -16(4a^3 + 27b^2)$ .

(a) Montrer que si  $\Delta(a, b) \neq 0$ , alors  $H(a, b)$  est une sous-variété  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}^2$ .

(b) Supposons que  $\Delta(a, b) = 0$ . Pour quelles valeurs de  $(a, b)$  la courbe  $H(a, b)$  est-elle une sous-variété de  $\mathbb{R}^2$  ? Quel est sa régularité ?

(c) Pour quelles valeurs de  $(a, b)$  le sous-ensemble  $H(a, b)$  est-il connexe ?

(d) Dessiner l'allure de  $H(-1, b)$  en fonction de  $b$ .

### 6. SURFACES ORIENTABLES

Dans cet exercice, on identifie  $\mathbb{R}^2$  avec  $\mathbb{C}$  par l'application  $(x, y) \mapsto x + iy =: z$ . Pour tout  $n \geq 1$ , soit  $\pi_n : z \mapsto z^n$ . On pose :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto y^2 - (x-1)^2(2 - (x-1)^2) \end{cases} .$$

Finalement, on pose  $C_1 := f^{-1}(\{0\})$  et  $C_n := \pi_n^{-1}(C_1) = (f \circ \pi_n)^{-1}(\{0\})$ .

- (a) Quelles sont les valeurs régulières de  $f$  ? Dessiner les ensembles de niveau de  $f$ . Combien ont-ils de composantes connexes ?
- (b) Dessiner  $C_1, C_2$  et  $C_3$ .
- (c) Quels sont les points  $z$  de  $C_n$  admettant un voisinage  $U_z$  tel que  $U_z \cap C_n$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^2$  ?
- (d) Montrer que, pour tout  $n \geq 1$ , il existe une immersion  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{R}^2$  dont l'image est  $C_n$ . Pour  $n = 1$ , on pourra considérer  $\theta \mapsto (1 + \sqrt{2} \sin(\theta), \cos(2\theta))$ .
- (e) Pour tout  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  et  $n \geq 1$ , on note  $\Sigma_n(\varepsilon)$  l'ensemble des solutions dans  $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$  de l'équation :

$$f(z^n)^2 + t^2 = \varepsilon^2.$$

Montrer qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que, pour tout  $n \geq 1$ , pour tout  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ , l'ensemble  $\Sigma_n(\varepsilon)$  soit une sous-variété  $\mathcal{C}^\infty$  compacte, connexe et de dimension 2 de  $\mathbb{C} \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^3$ .

- (f) Montrer qu'il existe un revêtement de degré  $n$  de  $\Sigma_n(\varepsilon)$  sur  $\Sigma_1(\varepsilon)$ .

**7. QUELQUES GROUPES DE LIE ET ESPACES HOMOGENES**

Soient  $1 \leq p, k \leq n$  des entiers. On note  $M_{n,k}(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices à coefficients réels, à  $n$  lignes et à  $k$  colonnes. On sait que  $M_{n,k}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{nk}$ . De plus, on distingue dans  $M_{n,n}(\mathbb{R})$  les matrices suivantes :

- $I_n$  est la matrice identité ;
- pour tout  $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,

$$I_{p,n-p} := \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix};$$

- Pour tout  $n \geq 1$  :

$$J_n := \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que les ensembles suivants, vus comme sous-ensembles de  $\mathbb{R}^{nk}$ , sont des sous-variétés  $\mathcal{C}^\infty$ . Calculer leur dimension. Expliciter leur espace tangent en  $I_n$  quand c'est possible. Déterminer si ces variétés sont compactes.

- (a)  $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_{n,n}(\mathbb{R}) : \det(A) \neq 0\}$  ;
- (b)  $SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_{n,n}(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$  ;
- (c)  $O(p, n-p) = \{A \in M_{n,n}(\mathbb{R}) : {}^t A I_{p,n-p} A = I_{p,n-p}\}^1$  ;
- (d)  $Sp_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_{2n,2n}(\mathbb{R}) : {}^t A J_n A = J_n\}^2$  ;
- (e)  $V_{n,k}(\mathbb{R}) = \{A \in M_{n,k}(\mathbb{R}) : {}^t A A = I_k\}^3$ .

On note  $O(n) = O(n, 0)$ . Pour finir, on s'intéresse de plus près aux variétés de Siefel. À  $n$  fixé, pour tous  $1 \leq \ell \leq k \leq n$ , on note  $\pi_{k,\ell} : V_{n,k} \rightarrow V_{n,\ell}$  l'application qui consiste à ne conserver que les  $\ell$  premières colonnes.

- (f) À quels espaces correspondent  $V_{n,1}(\mathbb{R})$  et  $V_{n,n}(\mathbb{R})$  ?
- (g) Montrer que, pour tout  $x \in V_{n,\ell}(\mathbb{R})$ , l'espace  $\pi_{k,\ell}^{-1}(x)$  est une sous-variété homéomorphe à  $V_{n-\ell,k-\ell}(\mathbb{R})$ .

**8. PLONGEMENTS D'ESPACES PROJECTIFS**

Le but de cet exercice est d'étudier certains plongements d'espaces projectifs, les plongements de Veronese. On note  $\pi_n : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  la projection canonique, et, pour tout  $n, d \geq 1$ , on note  $(P_{n,d,k})_{0 \leq k \leq m}$  les monômes de degré  $d$  en  $n+1$  variables<sup>4</sup>, avec  $m = C_d^{n+1} - 1$ . On pose :

$$f_{n,d} : \begin{cases} \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} & \rightarrow \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\} \\ x & \mapsto (P_{n,d,k}(x))_{0 \leq k \leq m} \end{cases}.$$

Soient  $n, d \geq 1$ .

- (a) Montrer que  $f_{n,d}$  est une immersion.
- (b) Montrer, par exemple en dérivant la fonction  $\lambda \mapsto P(\lambda x)$ , que, pour tout polynôme homogène de degré  $d$  en  $n+1$  variables,

$$\sum_{i=0}^n x_i \frac{\partial P}{\partial x_i}(x_0, \dots, x_n) = d \cdot P(x_0, \dots, x_n).$$

- (c) Montrer que  $\pi_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ . Quel est l'espace  $Ker(D_x \pi_n)$  ? Et l'espace  $Ker(D_x(\pi_n \circ f_{n,d}))$  ?
- (d) En déduire que  $(\pi_n \circ f_{n,d})|_{\mathbb{S}^n}$  est une immersion.

---

1. Pour  $p = 0$ , il s'agit des groupes orthogonaux.  
 2. Il s'agit des groupes symplectiques.  
 3. Ces ensembles sont aussi appelés variétés de Siefel.  
 4. Attention au nombre de variables !

(e) Montrer que  $(\pi_m \circ f_{n,d})|_{\mathbb{S}^n}$  passe au quotient en une application  $V_{n,d} : \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_m(\mathbb{R})$ , et que l'application obtenue est un plongement (i.e. une immersion qui est un homéomorphisme sur son image).

On supposera pour la dernière question que  $P_{n,d,k}(x_0, \dots, x_n) = x_k^d$  pour  $0 \leq k \leq n$ . On a par exemple  $V_{2,2}([x : y : z]) = [x^2 : y^2 : z^2 : xy : yz : xz]$ .

(f) Soit  $H \subset \mathbb{R}^{10}$  l'hyperplan d'équation  $x_0 + x_1 = x_2 + x_3$ . À quelle variété usuelle l'espace  $H \cap V_{3,2}(\mathbb{P}_3(\mathbb{R}))$  est-il homéomorphe ? On pourra s'aider de dessins, et se placer dans la carte  $[x : y : z : 1]$ .

---