TD 02 : Indice de lacets

1. **AUTOUR DE L'INDICE D'UN LACET**

On se propose de définir l'*indice* d'un élément de $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{C}^*)$, et de déterminer ses propriétés élémentaires. Soient $\gamma \in \mathcal{C}$, $x \in \mathbb{R}$ et $\hat{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ un relèvement de γ. On définit l'indice de γ par :

$$ind(\gamma) := \frac{\hat{\gamma}(x+1) - \hat{\gamma}(x)}{2\pi i}.$$

Dans un premier temps, on vérifie que cette notion a un sens, et on calcule l'indice de lacets dans des cas simples.

(a) Montrer que $ind(\gamma)$ ne dépend ni de x, ni du relèvement $\hat{\gamma}$ choisi, et est un entier relatif.
(b) Calculer $ind(e^{2\pi i n\cdot})$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
(c) Exprimer $ind(\overline{\gamma})$ en fonction de $ind(\gamma)$.
(d) Exprimer $ind(\gamma(-\cdot))$ en fonction de $ind(\gamma)$.
(e) Soient γ_1 et γ_2 dans $\mathcal{C}$. Exprimer $ind(\gamma_1\gamma_2)$ en fonction de $ind(\gamma_1)$ et $ind(\gamma_2)$. Attention : ici, $\gamma_1\gamma_2$ désigne le produit complexe de γ_1 et γ_2.
(f) Que vaut $ind(\gamma)$ si γ est à valeurs dans $B(1,1)$?

Pour finir, on cherche à comprendre la structure topologique de $\mathcal{C}$.

(g) Supposons que $|\gamma_2| < |\gamma_1|$. Montrer que $ind(\gamma_1 + \gamma_2) = ind(\gamma_1)$. On pourra utiliser les deux questions précédentes.
(h) En déduire que ind est continue sur $\mathcal{C}$.
(i) Posons $n := ind(\gamma)$. Montrer qu'il existe une application continue $G : [0,1] \to \mathcal{C}$ telle que $G(0) = \gamma$ et $G(1) = e^{2\pi i n\cdot}$.
(j) Quelles sont les composantes connexes de $\mathcal{C}$?
(k) Soit $f \in \mathcal{C}(\overline{B}(0,1), \mathbb{C}^*)$. On pose [1] $\gamma := f_{|\mathbb{S}_1}$. Montrer que $ind(\gamma) = 0$.

2. **DÉTERMINATIONS DU LOGARITHME COMPLEXE**

Dans cet exercice, nous ferons le lien plus explicitement entre la notion d'indice et les relèvements du logarithme. Pour tout ouvert U de $\mathbb{C}^*$, un *logarithme* sur U est une fonction analytique L sur U telle que $e^{L(z)} = z$ pour tout $z \in U$. On admet que $B(1,1)$ admet un logarithme tel que, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^1([0,1], B(1,1))$,

$$L(f(1)) - L(f(0)) = \int_0^1 \frac{f'(t)}{f(t)} dt.$$

(a) Montrer que, pour tout point $z_0 \in \mathbb{C}^*$, il existe un voisinage ouvert U de z_0 qui admet un logarithme.
(b) Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^*$ qui admet un logarithme. Montrer que tout lacet $\gamma : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to U$ est d'indice nul. En déduire que $\mathbb{C}^*$ n'admet pas de logarithme.
(c) Soit $\gamma \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{C}^*)$ un lacet. Montrer que [2] :

$$ind(\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\, \mathrm{d}t.$$

(d) Soient γ_x et γ_y les parties respectivement réelle et imaginaire de γ. Trouver des fractions rationnelles de deux variables réelles P et Q telles que :

$$ind(\gamma) = \int_0^1 P(\gamma_x(t), \gamma_y(t))\gamma_x'(t) + Q(\gamma_x(t), \gamma_y(t))\gamma_y'(t)\, \mathrm{d}t.$$

(e) Montrer qu'autour de tout point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, il existe un voisinage U et une fonction analytique f sur U telle que :

$$P(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ et } Q(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y),$$

mais qu'il n'existe pas de telle fonction f définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
(f) Dessiner le champ de covecteurs $(P(x,y), Q(x,y))$.

3. **THÉORÈME DE D'ALEMBERT-GAUSS**

Le but de cet exercice est de démontrer le théorème de d'Alembert-Gauss :

1. En identifiant $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et $\mathbb{S}_1$ grâce à l'application exponentielle.
2. En remarquant que $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \sim [0,1)$ en tant qu'espace mesuré.

Théorème 1.
Soit P un polynôme complexe non constant. Alors P admet au moins une racine complexe.

La démonstration se fera en utilisant la notion d'indice d'un lacet, et les résultats de l'exercice précédent. Dans ce qui suit, P est un polynôme complexe à une variable et de degré $d \geq 1$.

(a) Pour tout $r \geq 0$, on pose $\gamma_r(t) := P(re^{it})$. On suppose que γ_r ne s'annule jamais, auquel cas on peut voir ce lacet comme une fonction de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}^*$. Quel est l'indice de γ_0 ? De γ_r, où r est suffisamment grand ?

(b) On suppose encore que γ_r ne s'annule jamais. Montrer que $ind(\gamma_r)$ est constant. Conclure.

4. **RELÈVEMENT DE FONCTIONS DU CERCLE DANS LUI-MÊME**

On cherche à déterminer une condition nécessaire et suffisante pour relever des fonctions $f \in \mathcal{C}(\mathbb{S}_1, \mathbb{S}_1)$.

(a) Soient γ_1 et γ_2 dans $\mathcal{C}(\mathbb{S}_1, \mathbb{S}_1)$. Montrer que $ind(\gamma_2 \circ \gamma_1) = ind(\gamma_2)ind(\gamma_1)$.

(b) Soit $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ un entier non nul. On pose :

$$p_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{S}_1 & \to & \mathbb{S}_1 \\ z & \mapsto & z^n \end{array} \right. .$$

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{S}_1, \mathbb{S}_1)$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un relèvement $\hat{f}$ de f, c'est-à-dire une fonction $\hat{f} \in \mathcal{C}(\mathbb{S}_1, \mathbb{S}_1)$ telle que $p_n \circ \hat{f} = f$.

5. **CYLINDRE ET RUBAN DE MÖBIUS**

On rappelle que l'on définit le cylindre C et le ruban de M de la façon suivante.

Soit $X := [0,1] \times (-1/2, 1/2)$. On définit deux relations d'équivalence sur X. La relation $\sim_C$ est engendrée par $(0,x) \sim_C (1,x)$ pour tout $x \in (-1/2, 1/2)$. La relation $\sim_M$ est engendrée par $(0,x) \sim_M (1,-x)$ pour tout $x \in (-1/2, 1/2)$. On définit le cylindre comme l'espace topologique $C := X_{/\sim_C}$, et le ruban de Möbius comme l'espace topologique $M := X_{/\sim_M}$.

(a) En utilisant des rétractions par déformation bien choisies, calculer le groupe fondamental de C et de M.

(b) Les variétés C et M sont-elles homéomorphes ? On pourra regarder ce qu'il se passe quand on enlève un cercle bien choisi à M.