TD 01 : Topologie générale

1. **QUELQUES ESPACES TOPOLOGIQUES HOMÉOMORPHES (OU NON)**

   Les paires d'espaces suivants sont-il homéomorphes ? Si oui, expliciter un homéomorphisme ; sinon, démontrer qu'ils ne le sont pas.

   (a) Le carré $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \max\{|x|,|y|\} \leq 1\}$ et le disque unité fermé de $\mathbb{R}^2$.
   (b) La boule unité ouverte dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^n$, où $n \geq 1$.
   (c) Le cercle unité $\mathbb{S}_1 \subset \mathbb{C}$ et la droite réelle $\mathbb{R}$.
   (d) $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+^*$.
   (e) $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+$.
   (f) le plan complexe épointé $\mathbb{C}^*$ et le cylindre $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{R}$.
   (g) $(0,1)$ et $(0,1) \cup (2,3)$.
   (h) $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}$.

2. **DEUX LEMMES DE TOPOLOGIE GÉNÉRALE**

   Démontrer les deux lemmes de topologie générale, très utiles, suivants :

   (a) **Lemme de recollement** : Soient X et Y deux espaces topologiques. Soient A, $B \subset X$ deux ouverts (ou deux fermés) tels que $X = A \cup B$. Soit $f : X \to Y$. Supposons que $f_{|A}$ et $f_{|B}$ sont continues. Montrer que f est continue.
   (b) Soient X et Y deux espaces topologiques. Supposons que X est compact et Y séparé. Soit $f : X \to Y$ une fonction continue bijective. Montrer que f est un homéomorphisme.

3. **VARIÉTÉS TOPOLOGIQUES**

   Soit $d \geq 0$ un entier. Un espace topologique X est une *variété topologique* de dimension d si X est séparable, et si tout point de X a un voisinage homéomorphe à $\mathbb{R}^d$.

   (a) Montrer qu'un ouvert non vide d'une variété topologique est une variété topologique.
   (b) Montrer qu'un variété topologique connexe est connexe par arcs.
   (c) Soit X une variété topologique connexe de dimension $d \geq 2$. Montrer que, pour toute partie finie $\Sigma \subset X$, l'espace $X \setminus \Sigma$ est une variété topologique connexe par arcs.
   (d) Montrer que la sphère $\mathbb{S}_d$ est une variété topologique de dimension d. On pourra utiliser une projection stéréographique :

   $$\varphi_N := \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{S}_d \setminus \{(1,0,\cdots,0)\} & \to & \mathbb{R}^d \\ (x_0,\cdots,x_d) & \mapsto & \frac{1}{1-x_0}(x_1,\cdots,x_d) \end{array} \right. .$$

   (e) Soit $d \geq 1$. On définit une relation d'équivalence $\sim$ sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ par :

   $x \sim y$ si et seulement si $\exists \lambda \in \mathbb{R}^* \ : \ x = \lambda y$.

   Montrer que l'espace topologique $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}_{/\sim}$ est une variété topologique. Quelle est sa dimension ?

4. **CYLINDRE ET RUBAN DE MÖBIUS**

   Soit $X := [0,1] \times [-1/2, 1/2]$. On définit deux relations d'équivalence sur X, de la façon suivante. La relation $\sim_C$ est engendrée par $(0,x) \sim_C (1,x)$ pour tout $x \in [-1/2,1/2]$. La relation $\sim_M$ est engendrée par $(0,x) \sim_M (1,-x)$ pour tout $x \in [-1/2,1/2]$. On définit le cylindre comme l'espace topologique $C := X_{/\sim_C}$, et le ruban de Möbius comme l'espace topologique $M := X_{/\sim_M}$.

   (a) Montrer que C et M sont des espaces topologiques connexes par arcs.
   (b) Montrer que C est homéomorphe à l'espace $\{z \in \mathbb{C} : \ 1 \leq |z| \leq 2\}$.
   (c) Montrer que C et M sont des variétés topologiques à bord de dimension 2.

5. **TRANSFORMATIONS DU TORE**

   Soit $\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n_{/\mathbb{Z}^n}$ le tore de dimension n, et $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$ la projection canonique. Soit $A \in M_n(\mathbb{Z})$.

   (a) Montrer que $\pi \circ A$ passe au quotient en une application continue $\overline{A} : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$.
   (b) Montrer que $\overline{A}$ est surjective si et seulement si $\det(A) \neq 0$.
   (c) À quelle condition $\overline{A}$ est-elle injective ?
   (d) Montrer que $\mathbb{T}^n$ est compact. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $\overline{A}$ soit un homéomorphisme.

6. **HOMÉOMORPHISMES ET DIFFÉOMORPHISMES DE CÔNES**

Le but de cet exercice est de déterminer les classes d'équivalence de cônes de $\mathbb{R}^2$ sous l'action des homéomorphismes et des difféomorphismes.

Pour tout $\alpha \in (0, 2\pi)$, on note :

$$K_\alpha := \left\{ \begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin\theta \end{pmatrix} : (r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0,\alpha] \right\}.$$

(a) Soient α et α' dans $(0, 2\pi)$. En travaillant en coordonnées polaires, montrer que K_α et $K_{\alpha'}$ sont homéomorphes.
(b) Soit $\alpha \in (0,\pi)$. En travaillant en coordonnées cartésiennes, montrer que K_α et $K_{\frac{\pi}{2}}$ sont $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphes.
(c) De même, montrer que K_α et $K_{\frac{3\pi}{2}}$ sont $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphes pour tout $\alpha \in (\pi, 2\pi)$.
(d) Soient $\alpha \in (0, 2\pi)$ et $\gamma : \mathbb{R}_+ \to K_\alpha$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\gamma(0) = 0$. Montrer que $\gamma'(0) \in K_\alpha$.
(e) Soient $\alpha \in [\pi, 2\pi)$ et $\alpha' \in (0,\pi)$. Supposons qu'il existe un difféomorphisme $\varphi : K_\alpha \to K_{\alpha'}$. Trouver une courbe $\gamma : \mathbb{R} \to K_\alpha$ telle que $\varphi\circ\gamma(0) = 0$ et $(\varphi\circ\gamma)'(0) \neq 0$. Que peut-on en conclure ?
(f) Soit $\alpha \in (\pi, 2\pi)$. Montrer que K_α et K_π ne sont pas difféomorphes.

On définit deux relations $\sim_h$ et $\sim_d$ sur $(0, 2\pi)$ par $\alpha \sim_h \alpha'$ (resp. $\alpha \sim_d \alpha'$) si et seulement s'il existe un homéomorphisme (resp. un difféomorphisme) de K_α dans $K_{\alpha'}$.

(g) Montrer que $\sim_h$ et $\sim_d$ sont des relations d'équivalence. Quelles sont les classes d'équivalence de $(0, 2\pi)$ pour ces deux relations ?

7. **CALCUL DIFFÉRENTIEL DANS $M_n(\mathbb{R})$**

Soit $n \geq 1$. On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme quelconque, et $E := M_n(\mathbb{R})$ de la norme d'opérateurs :

$$\|A\| := \sup_{v\in\mathbb{R}^n \,:\, \|v\|\leq 1} \|Av\| .$$

On rappelle que cette norme fait de E une algèbre de Banach : $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$ pour tous A et B dans E. On note de plus $U := GL_n(\mathbb{R})$.

(a) Calculer la différentielle de l'application :

$$f_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} E\times E & \to & E \\ (A,B) & \mapsto & AB \end{array} \right. .$$

(b) En déduire la différentielle de l'application :

$$f_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ A & \mapsto & A^2 \end{array} \right. .$$

On s'intéresse maintenant à l'application inverse :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} U & \to & U \\ A & \mapsto & A^{-1} \end{array} \right. .$$

(c) Montrer que U est un ouvert dense de E et que f est analytique sur U.
(d) Montrer que, pour toute matrice $M \in E$ telle que $\|M\| < 1$, la matrice $(I - M)$ est inversible et :

$$(I-M)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} M^k.$$

(e) En déduire la différentielle de f.

Pour finir, on s'intéresse à l'application $\det : E \to \mathbb{R}$.

(f) Montrer que $\det$ est analytique sur E.
(g) Calculer $D_I \det$ (on pourra calculer les dérivées partielles de $\det$ dans une base bien choisie).
(h) En déduire la différentielle de $\det$ sur U, puis sur E.