Devoir numéro 3 : Fonction de Morse sur l'espace projectif

Le but de ce devoir est de construire une fonction de Morse sur l'espace projectif réel. Dans ce devoir, $\mathbb{S}_n$ désigne la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$, munie de sa stucture de sous-variété différentielle. $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace des droites vectorielles de $\mathbb{R}^{n+1}$. On rappelle que la projection canonique $\pi_n : \mathbb{S}_n \to \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ est un difféomorphisme local.

On se donne un entier $n \geq 1$, et une matrice $A \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ symmétrique, inversible, et dont toutes les valeurs propres sont distinctes. On note $\lambda_0 > \lambda_1 > \ldots > \lambda_n$ ses valeurs propres, et on se donne $(v_0, \ldots, v_n)$ une base de vecteurs propres unitaires correspondant. On écrira $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ les coordonnées d'un point x dans cette base. On définit alors des applications (on admettra que ce sont des cartes sur $\mathbb{S}_n$) :

$$\varphi_p^{\pm} : \left\{ \begin{array}{lcl} U_p^{\pm} := \mathbb{S}_n \cap \{\pm x_p > 0\} & \to & \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto & (x_i/x_p)_{0 \leq i \leq n,\, i \neq p} \end{array} \right. .$$

Enfin, on pose :

$$F : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{S}_n & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^t A x \end{array} \right. .$$

On note $Crit(f)$ l'ensemble des points critiques d'une application f à valeurs réelles.

1. Quels sont les points critiques de F ?
2. Soit y un point critique de F. Expliciter $F \circ (\varphi_p^{\pm})^{-1}$ pour une carte $(U_p^{\pm}, \varphi_p^{\pm})$ bien choisie.
3. Calculer la hessienne de $F \circ (\varphi_p^{\pm})^{-1}$ en son point critique. Quel est son indice $ind(y, F)$?
4. En déduire que F est une fonction de Morse. Calculer la quantité :

$$\chi(\mathbb{S}_n) := \sum_{y \in Crit(F)} (-1)^{ind(y,F)}.$$

5. F passe au quotient en une application $\widetilde{F} \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{P}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$. Montrer que $\widetilde{F}$ est une fonction de Morse, et calculer de la même façon $\chi(\mathbb{P}_n(\mathbb{R}))$.
6. On pose $n = 2$, et $A = Diag(-1, 1, 2)$. Dessiner le champ de gradient de $\tilde{F}$ au voisinage de chaque point critique.