Devoir numéro 2 : Plongements d'espaces projectifs

Le but de ce devoir est d'étudier une famille de plongements d'espaces projectifs.

NOTATIONS

Dans ce devoir, $\mathbb{S}_n$ désigne la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$, munie de sa stucture de sous-variété différentielle ; $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace des droites vectorielles de $\mathbb{R}^{n+1}$, sa structure de variété différentielle étant définie à l'aide des coordonnées homogènes. Les coordonnées dans $\mathbb{R}^{n+1}$ sont indicées en partant de 0. On note :

$$\pi_n : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} & \to & \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \\ x & \mapsto & Vect(x) \end{array} \right. .$$

Enfin, pour tout n, $d \geq 1$, on note $(P_{n,d,k})_{0 \leq k \leq m}$ les monômes de degré d en $n+1$ variables [1], avec $m = C_d^{n+d} - 1$. On pose :

$$f_{n,d} : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} & \to & \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\} \\ x & \mapsto & (P_{n,d,k}(x))_{0 \leq k \leq m} \end{array} \right. .$$

QUESTIONS

Soient n, $d \geq 1$.

1. Montrer, en travaillant dans des cartes, que $\pi_{n|\mathbb{S}_n} : \mathbb{S}_n \to \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ est un difféomorphisme local.
2. Soit M une variété différentielle. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{S}_n, M)$. Supposons que $f(x) = f(-x)$ pour tout x. Alors f passe au quotient en une application $\tilde{f} \in \mathcal{C}(\mathbb{P}_n(\mathbb{R}), M)$ telle que $f = \tilde{f} \circ \pi_{n|\mathbb{S}_n}$. Montrer que $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, puis que si f est une immersion (respectivement submersion, difféomorphisme local), alors $\tilde{f}$ aussi.

Maintenant que l'on a démontré ces préliminaires, on va étudier les applications $f_{n,d}$.

3. Montrer que $f_{n,d}$ est une immersion.
4. En dérivant la fonction $\lambda \mapsto P(\lambda x)$, montrer que, pour tout polynôme homogène de degré d en $n+1$ variables,

$$\sum_{i=0}^{n} x_i \frac{\partial P}{\partial x_i}(x_0, \ldots, x_n) = d \cdot P(x_0, \ldots, x_n).$$

5. Montrer que π_n est de classe $\mathcal{C}^1$. Quel est l'espace $Ker(D_x \pi_n)$? Et l'espace $Ker(D_x(\pi_m \circ f_{n,d}))$?
6. En déduire que $(\pi_m \circ f_{n,d})_{|\mathbb{S}_n}$ est une immersion.
7. Montrer que $(\pi_m \circ f_{n,d})_{|\mathbb{S}_n}$ passe au quotient en une application $V_{n,d} : \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_m(\mathbb{R})$, et que l'application obtenue est un plongement (i.e. un difféomorphisme sur son image).

On supposera pour la dernière question que $P_{n,d,k}(x_0, \ldots x_n) = x_k^d$ pour $0 \leq k \leq n$. On a par exemple $V_{2,2}([x : y : z]) = [x^2 : y^2 : z^2 : xy : yz : xz]$.

8. Soit $H \subset \mathbb{R}^{10}$ l'hyperplan d'équation $x_0 + x_1 = x_2 + x_3$. À quelle varieté usuelle l'espace $H \cap V_{3,2}(\mathbb{P}_3(\mathbb{R}))$ est-il homéomorphe ? On pourra s'aider de dessins, et se placer dans la carte $[x : y : z : 1]$.

---

1. Attention au nombre de variables !