Devoir numéro 1 : Surfaces plates à singularités

Le but de ce devoir est de déterminer le groupe d'homotopie des surfaces de genre $g \geq 1$ ("à g trous"), grâce à une réalisation géométrique de ces surfaces par des polygones dont on a recollé les côtés.

Soit $n \geq 2$ un entier. Soit $P(n)$ l'enveloppe convexe des racines $2n$-ièmes de l'unité dans le plan complexe ; c'est un polygone régulier à $2n$ côtés. On recolle les côtés opposés à l'aide de la relation d'équivalence $\sim_n$ engendrée par :

$$(1-t)e^{i\frac{k\pi}{n}} + te^{i\frac{(k+1)\pi}{n}} \sim -te^{i\frac{k\pi}{n}} - (1-t)e^{i\frac{(k+1)\pi}{n}} \quad \forall t \in [0,1], \ \ \forall k \in [\![0, n-1]\!].$$

On note $\Sigma(n) := P(n)_{/\sim_n}$. De plus, on note $\partial P(n)$ le bord du polygone $P(n)$, et $\partial\Sigma(n) := (\partial P(n))_{/\sim_n}$.

1. Décrire, en fonction de n, la classe d'équivalence de 1.
2. Montrer que $\Sigma(n)$ est une variété topologique, et qu'elle est connexe par arcs. On pourra utiliser des résultats généraux sur les recollements de variétés ; attention tout de même à la classe d'équivalence de 1.
3. À quelle surface usuelle $\Sigma(2)$ est-elle homéomorphe ?
4. À l'aide d'un découpage et d'un collage bien choisis, montrer que $\Sigma(2)$ et $\Sigma(3)$ sont homéomorphes. Encore une fois, il ne sera pas nécessaire de démontrer dans le détail que les opérations effectuées sont bien des homéomorphismes.

Pour simplifier, on suppose dans les trois questions suivantes que n est pair. On va calculer une présentation du groupe fondamental de $\Sigma(n)$. Pour tout $0 \leq k < n$, on appelle a_k la classe d'homotopie du lacet $t \mapsto (1-t)e^{i\frac{k\pi}{n}} + te^{i\frac{(k+1)\pi}{n}}$, enraciné en 1 :

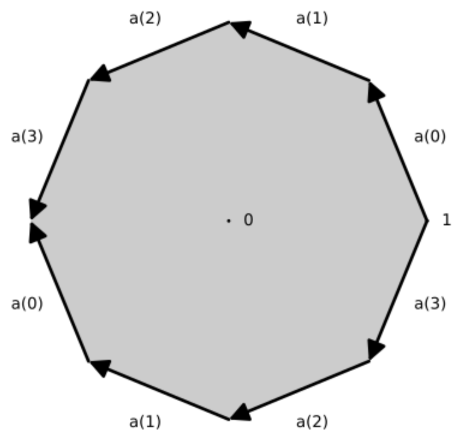

FIGURE 1 – Le polygone fondamental et les lacets $a(k)$, pour $n = 4$.

5. Montrer que $\pi_1(\partial\Sigma(n), 1)$ est isomorphe au groupe libre à n générateurs, et que $(a_k)_{0 \leq k < n}$ en est une partie génératrice.
6. Montrer que $\Sigma(n) \setminus \{0\}$ se rétracte par déformation sur $\partial\Sigma(n)$.
7. Utiliser le théorème de Van Kampen pour calculer une présentation du groupe $\pi_1(\partial\Sigma(n), 1/2)$. On pourra poser $U := \Sigma(n) \setminus \{0\}$ et $V := \Sigma(n) \setminus \partial\Sigma(n)$.

Les variétés $\Sigma_2(n)$ ont naturellement une structure de *surface plate avec singularités*. Pour de telles surfaces, il existe un notion de *courbure* $\kappa(x)$ en un point x. Soit $S(x, \varepsilon)$ le cercle centré en x et de rayon $\varepsilon > 0$. Alors :

$$\kappa(x) = 2\pi - \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{|S(x,\varepsilon)|}{\varepsilon},$$

où $|\cdot|$ représente ici la longueur. Les singularités de Σ sont les points en lesquels κ est non nul ; on note $\sigma(\Sigma)$ l'ensemble des singularités de Σ. La *caractéristique d'Euler* d'une surface plate avec singularités Σ vaut alors, en accord avec le théorème de Gauss-Bonnet,

$$\chi(\Sigma) = \frac{1}{2\pi} \sum_{x \in \sigma(\Sigma)} \kappa(x).$$

8. Calculer $\chi(\Sigma(n))$ pour tout $n \geq 2$, quelque soit la parité de n.