Feuille d'exercices 1 : Matrices, bases et applications linéaires.

Applications linéaires

Exercice 1. Existe-t-il une application linéaire entre K-espaces vectoriels, avec $K = \mathbb{R}$, telle que
(a) l'image d'une droite vectorielle soit une demi-droite (ouverte/fermée) ?
(b) l'image d'un plan vectoriel soit un plan vectoriel privé de l'origine ?
(c) l'image d'un plan vectoriel privé de l'origine soit une droite vectorielle ?
(d) (*) que pouvez-vous dire de (b) et (c) pour K un corps quelconque ?

Exercice 2. Pour les familles de vecteurs $\mathcal{F} = (e_1, e_2, \dots e_n)$ et $\mathcal{F}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ suivantes, existe-t-il une application linéaire permettant de passer de $\mathcal{F}$ à $\mathcal{F}'$? Si oui est-elle unique ?

(a) Les vecteurs de $\mathbb{R}^2$: $e_1 = (1, 0), e_2 = (3, 2), e_3 = (1, -2)$
et les vecteurs de $\mathbb{R}^2$: $e'_1 = (0, 1), e'_2 = (0, -2), e'_3 = (-2, 4)$ (dessiner les vecteurs dans ce cas) ;

(b) Les vecteurs de $\mathbb{C}^3$: $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$
et les vecteurs de $\mathbb{C}^3$: $e'_1 = (0, 0, 0), e'_2 = (0, 0, 1), e'_3 = (1, 0, 0)$;

(c) Les vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1), e_4 = (1, 1, 1)$
et les vecteurs de $\mathbb{R}_3[X]$: $e'_1 = X^3, e'_2 = X^2, e'_3 = X, e'_4 = 1$;

(d) Les vecteurs de $\mathbb{R}_4[X]$: $e_1 = 1 + X^4, e_2 = X^2$
et les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ $e'_1 = (2, -1), e'_2 = (3, 0)$;

(e) Les vecteurs de $\mathbb{R}_3[X]$: $e_1 = 2X + 1, e_2 = X^3 + X^2 + X, e_2 = 2X^3 + 2X^2 + 1$
et les vecteurs de $\mathbb{R}_2[X]$: $e'_1 = 1 + X, e'_2 = 2 + 2X, e'_3 = 3 + 3X$;

(f) Les vecteurs de $\mathbb{C}_4[X]$, $e_1 = (1, 1, 1, 0), e_2 = (0, i, i, i), e_3 = (-1, 1, 1, 2)$
et les matrices de $M_2(\mathbb{C})$ $e'_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $e'_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $e'_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ i & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $f(e_1) = e'_1$ et $f(e_2) = e'_2$. Dans chacun des cas suivants, déterminer graphiquement l'image des vecteurs v_i, donner la matrice de f dans la base canonique, puis l'expression de $f(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Identifier la transformation du plan définie par f.
(a) pour $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$, $e'_1 = (1, 1)$, $e'_2 = (-1, 1)$ et $v_1 = (2, 0)$, $v_2 = (2, 1)$;
(b) pour $e_1 = (1, 1)$, $e_2 = (0, 1)$, $e'_1 = (4, 1)$, $e'_2 = (3, 1)$ et $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (2, -1)$;
(c) pour $e_1 = (3, 3)$, $e_2 = (0, -3)$, $e'_1 = (1, 2)$, $e'_2 = (-2, -4)$ et $v_1 = (1, 2)$, $v_2 = (2, 1)$.

Exercice 4. On considère les applications linéaires $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définies pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f_1(x, y) = (y, x), \quad f_2(x, y) = \left(\frac{2x + y}{4}, \frac{2x + y}{2} \right), \quad f_3(x, y) = \left(\frac{x - \sqrt{3}y}{2}, \frac{\sqrt{3}x + y}{2} \right).$$

(a) Représenter l'image de la base canonique pour chacune de ces applications. Préciser leur nature.
(b) Donner les matrices associées à ces applications. Ces matrices sont-elles équivalentes ?

Exercice 5. Si A est la matrice associée à une application linéaire f dans une base quelconque, montrer que le rang de f est la dimension de l'espace engendré par les colonnes de A.

Exercice 6. Quelles sont les classes d'équivalences des matrices de $M_{n,1}(\mathbb{R})$?

Exercice 7. Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont équivalentes ?

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} i & -1 \\ -i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ i & -1 & 0 \\ -1 & -i & 0 \end{pmatrix}, O = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 4 \\ 2 & 6 & 0 & 5 \\ 3 & 7 & 0 & 6 \\ 4 & 8 & 0 & 7 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 & 4 \\ 2 & 6 & -6 & 4 \\ 3 & 7 & -7 & 4 \\ 4 & 8 & -8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bases et espaces vectoriels

Exercice 8. Les familles de fonctions suivantes sont-elles libres ?

(a) $\{\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \exp(kx)\}_{k=1,\dots n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$;

(b) $\{\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^k\}_{k=0,\dots n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$;

Exercice 9. On considère l'ensemble $M_2(\mathbb{C})$ des matrices 2×2 à coefficients dans $\mathbb{C}$.

(a) Rappelez pourquoi $M_2(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?

(b) Montrer que $M_2(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?

(c) Réciproquement, est-ce que $M_2(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ?

Exercice 10. (a) Pour $x, y, z \in \mathbb{R}$ calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 2 & 3 & y \\ 3 & 4 & z \end{vmatrix}$.

(b) En déduire une équation cartésienne du sous-espace vectoriel H de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs de coordonnées $(1, 2, 3)$ et $(2, 3, 4)$.

(c) Montrer que H est le noyau d'une forme linéaire $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ et donner sa matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}$.

Exercice 11. ($\star$) Soit $\{v_1, v_2, \dots v_{n-1}\}$ une famille libre de vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension n. Montrer qu'un vecteur u de E appartient au sous-espace vectoriel engendré par ces vecteurs si et seulement si $\det(v_1, v_2, \dots v_{n-1}, u) = 0$.

Exercice 12. Soit E un espace vectoriel de dimension n. On désigne par $E^* = L(E, \mathbb{R})$ l'ensemble des formes linéaires sur E. Remarquer que E^* est un espace vectoriel, préciser sa dimension et donner une base.

Exercice 13. ($\star$) Montrer qu'un sous-espace vectoriel est un hyperplan si et seulement si il est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Algèbre

Exercice 14. Montrer que la relation "*A est équivalente à B*" est une relation d'équivalence sur l'ensemble des matrices $M_{n,p}(\mathbb{R})$

Exercice 15.

(a) Montrer qu'une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ est une matrice de passage si et seulement si elle est inversible.

(b) Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un groupe multiplicatif. Est-il commutatif ?

Exercice 16. ($\star$) L'ensemble $M_{n,p}(\mathbb{R})$ est-il un groupe multiplicatif ?

Exercice 17. ($\star$)

(a) Montrer que la famille de matrices de $M_2(\mathbb{C})$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ est libre.

(b) Montrer que le sous-espace vectoriel engendré par cette famille forme une algèbre.

(c) Montrer qu'il forme un corps.

Exercice 18. Soit $P \in K[X]$ un polynôme sur un corps K et $\lambda \in K$. Montrer que $P(\lambda) = 0$ si et seulement si $(X - \lambda)$ divise le polynôme P.