Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. Difféomorphismes. Notes.

Table des matières

1 Prérequis

Connaissances préalables :
- ▷ Différentiabilité de fonctions de plusieur variables réelles.
- ▷ Intégrales et primitives.

Dans ce qui suit, on se donne :
- ▷ $n \geq 1$ un entier.
- ▷ $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert non vide.
- ▷ $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
- ▷ $f : U \to \mathbb{R}^n$.

2 Difféomorphismes entre intervalles

Cette partie est issue du cours sur le théorème des valeurs intermédiaires.

2.1 Monotonie des fonctions dérivables

Rappelons le

Théorème 1.
Soient I, J deux intervalles réels et $f : I \to J$. Alors f est un homéomorphisme [a] si et seulement si les trois conditions suivantes sont remplies :
- ▷ *f est continue ;*
- ▷ *f est surjective ;*
- ▷ *f est strictement monotone.*

Si c'est le cas, alors J est un intervalle de même nature que I, et f^{-1} a le même sens de variation que f.

a. C'est-à-dire : est continue d'inverse continu.

La condition de stricte monotonie apparaissant dans cette caractérisation des homéomorphismes se lit sur les dérivées.

Proposition 2.1.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de continue et dérivable. f est strictement croissante (respectivement, strictement décroissante) si et seulement si $f' \geq 0$ (respectivement, $f' \leq 0$), et s'il n'existe pas d'intervalle non réduit à un point $J \subset I$ tel que $f' = 0$ sur J.

Démonstration.
Montrons le sens direct par sa contraposée. S'il existe un point x tel que $f'(x) < 0$, alors on peut trouver $h > 0$ tel que $f(x+h) < f(x)$ (ou $f(x-h) > f(x)$), donc f n'est pas croissante. De plus, s'il existe un tel intervalle J, alors, pour tous x, $y \in J$,

$$f(y) = f(x) + \int_x^y f'(t)\,\mathrm{d}t = f(x),$$

donc f n'est pas strictement croissante.

Montrons le sens indirect. Soient $x < y$ deux points de I. Par le théorème des accroissements finis, il existe $z \in (x, y)$ tel que $f(y) - f(x)(y-x)f'(z) \geq 0$, donc f est croissante. De plus, il existe $z \in (x, y)$ tel que $f'(z) > 0$. Soit donc h suffisamment petit tel que $f(z+h) > f(z)$ et $z + h \leq y$. Alors $f(x) \leq f(z) < f(z+h) \leq f(y)$. La fonction f est donc bien strictement croissante. □

La condition de cette proposition garantit que f est strictement monotone, ce qui suffit, à surjectivité près, à montrer que f est un homéomorphisme, donc que f^{-1} est continue. Cependant, cela ne suffit pas pour montrer que f^{-1} est dérivable, comme le montrer l'exemple de la fonction $x \mapsto x^3$ en 0.

2.2 Caractérisation des difféomorphismes d'intervalles de $\mathbb{R}$

Un difféomorphisme est la version $\mathcal{C}^1$ (ou $\mathcal{C}^k$) d'un homéomorphisme.

Définition 2.2 (Difféomorphisme).
Une application $f : I \to J$ est un ***difféomorphisme*** *lorsque f est $\mathcal{C}^1$ sur I, bijective, et f^{-1} est $\mathcal{C}^1$ sur J. S'il existe un difféomorphisme de I dans J, on dit que I et J sont* ***difféomorphes****.*

Deux espaces sont homéomorphes s'ils sont indistinguables en tant qu'espaces topologiques. En particulier, ils sont les "mêmes fonctions continues" : si $h : X \to Y$ est un homéomorphisme et Z un espace topologique, alors $f : Y \to Z$ est continue si et seulement si $f \circ h : X \to Z$ est continue. On peut donc identifier les fonctions continues sur X avec les fonctions continues sur Y.

Deux espaces sont difféomorphes s'ils ont la même "structure $\mathcal{C}^1$", et sont donc indistinguables en tant qu'espaces munis d'une structure $\mathcal{C}^1$. En particulier, ils ont les "mêmes fonctions $\mathcal{C}^1$", au sens ci-dessus.

La relation "Être difféomorphes" est une relation d'équivalence sur les parties de $\mathbb{R}$, et en particulier sur les intervalles. Elle coïncide, pour les intervalles, avec la relation "Être homéomorphes" – mais il s'agit là d'un phénomène propre à la dimension 1, et faux même en dimension 2 !

Proposition 2.3.
Soit $f : I \to J$ un difféomorphisme. Alors $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$. De plus, pour tout $y \in J$,

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Démonstration.
Pour tout $y \in J$, on sait que $f \circ f^{-1}(y) = y$. Les fonctions f et f^{-1} étant dérivables, la formule de dérivation en chaîne implique que, pour tout $y \in J$,

$$f'(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1})'(y) = 1.$$

En particulier, $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$ et $(f^{-1})'(y)$ est donné par la formule annoncée. Enfin, en appliquant cela à $y = f(x)$, on en déduit que $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$. □

Théorème 2.
Soient I, J deux intervalles réels et $f : I \to J$. Alors f est un difféomorphisme si et seulement si les trois conditions suivantes sont remplies :
- ▷ *f est $\mathcal{C}^1$;*
- ▷ *f est surjective ;*
- ▷ *f' ne s'annule pas.*

Si c'est le cas, alors J est un intervalle de même nature que I, et $(f^{-1})'$ est du même signe que f'.

Démonstration.
Le sens direct suit de la proposition précédente. Supposons que les trois conditions soient remplies. Comme la dérivée de f ne s'annule pas, par le théorème des valeurs intermédiaires, f est strictement monotone. La fonction f est donc un homéomorphisme. L'intervalle J est donc de même nature que

I. De plus, la fonction f^{-1} est bien définie, continue, strictement monotone, et a le même sens de variation que f. Il reste à montrer que f^{-1} est bien de classe $\mathcal{C}^1$.

Première stratégie : On encadre à la main les taux d'accroissement de f^{-1} pour montrer que ceux-ci convergent vers $\frac{1}{f' \circ f^{-1}}$. On sait déjà que f^{-1} est bien définie et continue. Soit $y \in I$ et h suffisamment petit. Alors

$$f(f^{-1}(y)) + h = y + h = f(f^{-1}(y+h)),$$

et donc

$$h = \int_{f^{-1}(y)}^{f^{-1}(y+h)} f'(t) \, \mathrm{d}t.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\delta > 0$ tel que $|f'(t) - f'(f^{-1}(y))| \leq \varepsilon$ pour tout $|t| \leq \delta$. Soit $\nu > 0$ tel que $|f^{-1}(y+h) - f^{-1}(y)| \leq \delta$ pour tout $|h| \leq \nu$. Alors, si $|h| \leq \nu$, en supposant pour simplifier que f est croissante et $h \geq 0$,

$$\left[f'(f^{-1}(y)) - \varepsilon\right] \left[f^{-1}(y+h) - f^{-1}(y)\right] \leq h \leq \left[f'(f^{-1}(y)) + \varepsilon\right] \left[f^{-1}(y+h) - f^{-1}(y)\right],$$

et donc

$$\frac{1}{f'(f^{-1}(y)) + \varepsilon} \leq \frac{f^{-1}(y+h) - f^{-1}(y)}{h} \leq \frac{1}{f'(f^{-1}(y)) - \varepsilon}.$$

Par conséquent, en faisant tendre ε vers 0, on montre que f^{-1} est dérivable en 0, et on retrouve la formule de sa dérivée.

Deuxième stratégie : On construit f^{-1} d'une façon qui implique directement que cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $y \in J$. Posons, pour tout $z \in J$,

$$g(z) := f^{-1}(y) + \int_y^z \frac{1}{f'(f^{-1}(t))} \, \mathrm{d}t.$$

L'intégrand est bien défini et continu, donc g est de classe $\mathcal{C}^1$. De plus,

- ▷ $g \circ f(f^{-1}(y)) = g(y) = f^{-1}(y)$;
- ▷ $(g \circ f)' = g' \circ f \cdot f' = \frac{f'}{f' \circ f^{-1} \circ f} = 1$ sur I.

Par conséquent, $g(f(x)) = x$ pour tout $x \in I$. L'application f étant surjective, $f(g(y)) = y$ pour tout $y \in J$, donc g est bien l'inverse de f. En particulier, f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$.

Troisième stratégie : On utilise la "vraie" version du théorème des fonctions implicites. Soit $x_0 \in I$. Soit $F(x, y) := x - f(y)$ pour tous $x \in I$ et $y \in \mathbb{R}$. Alors F est de classe $\mathcal{C}^1$, et sa dérivée partielle par rapport à la seconde variable est exactement $-f'$, donc ne s'annule pas. Par le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage rectangulaire $V \times W$ de $(f(x_0), x_0)$ et une fonction φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur V telles que

$$\{(x, y) \in V \times W : \; x = f(y)\} = \{(x, \varphi(x)), x \in V\}.$$

Mais alors $f(\varphi(x)) = x$ pour tout $x \in V$, donc φ est l'inverse de f sur U. Donc φ et f^{-1} coïncident sur U. Or φ est de classe $\mathcal{C}^1$, donc f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le voisinage U de $f(x_0)$. Le point x_0 étant arbitraire, f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$. □

Remarque 2.4.
L'utilisation du théorème des fonctions implicites peut être vue comme une forme de triche. Ce théorème se démontre typiquement à partir du théorème d'inversion locale, qui implique directement le résultat souhaité.

Exercice 2.5.
Reprendre la deuxième méthode ci-dessus, en modifiant la définition de la fonction g afin d'obtenir directement $(f \circ g)' = 1$.

Application 2.6.
La fonction racine carrée est un difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Sa dérivée en $y \in \mathbb{R}_+^*$ vaut bien

$$\left(\sqrt{}\right)'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

En 0, la dérivée de la fonction carré est nulle, donc la fonction racine carrée n'est pas dérivable.

2.3 Dérivabilité d'ordre supérieur

La caractérisation des homéomorphismes et des difféomorphismes est différente : une fonction peut être un homéomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ sans être un difféomorphisme. Cette différence n'apparaît qu'entre ces deux ordres de différentiabilité : il n'y a pas de nuance supplémentaire pour des fonctions plus dérivables.

Proposition 2.7.
Soit $f : I \to J$ un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^k$, avec $k \geq 1$. Alors f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^k$.
En particulier, si f est surjective et f' ne s'annule pas, alors f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^k$.

Démonstration.
On procède par récurrence sur k. L'assertion est vraie pour $k = 1$. Supposons-la vraie au rang $k \geq 1$, et soit f de classe $\mathcal{C}^{k+1}$. Alors f est un difféomorphisme, et

$$f' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Par hypothèse, f' est de classe $\mathcal{C}^k$; par hypothèse de récurrence, f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^k$. Donc $(f^{-1})'$ est de classe $\mathcal{C}^k$, donc f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$. $\square$

3 Difféomorphismes en dimension supérieure

Soient U, V deux ouverts[1] de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : U \to V$ de classe $\mathcal{C}^1$. À quelle condition f est-elle un difféomorphisme sur son image ?

3.1 Un contre-exemple

Remarquons que, si f est un difféomorphisme, alors, pour tout $x \in U$,

$$\begin{aligned} f^{-1} \circ f &= \mathrm{id} \\ D_x(f^{-1} \circ f) &= D_x\mathrm{id} \\ D_{f(x)}f^{-1} \cdot D_x f &= \mathrm{id} \end{aligned}$$

En particulier, $D_x f$ est inversible.

Dans le cas des intervalles, une fonction $\mathcal{C}^1$ est un difféomorphisme sur son image si et seulement si sa dérivée ne s'annule pas. **Ce n'est plus le cas en dimension supérieure !**

1. On peut relâcher un peu cette hypothèse, pour admettre par exemples des solides dont le bord est "gentil" : cubes, simplexes, boules... La principale condition est que le bord ne doit pas "s'aplatir". Ainsi, le domaine $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq x^2\}$ ne convient pas, à cause de l'aplatissement en $(0, 0)$.

Exemple 3.1.
Soit

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ (x,y) & \mapsto & (e^x\cos(y), e^x\sin(y)) \end{cases}.$$

Alors f est $\mathcal{C}^1$, surjective, et

$$Jac_{(x,y)}f = \begin{pmatrix} e^x\cos(y) & -e^x\sin(y) \\ e^x\sin(y) & e^x\cos(y) \end{pmatrix}.$$

En particulier, $\det(Jac_{(x,y)}f) = e^{2x} \neq 0$, donc la différentielle de f est toujours inversible. Pourtant, f n'est pas un difféomorphisme : f n'est ***pas injective*** *!*
Pire encore, les espaces topologiques $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ne sont pas homéomorphes[2]*, donc a fortiori on ne peut pas trouver de difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.*

3.2 Théorème d'inversion locale

La condition selon laquelle D_xf est toujours inversible permet cependant d'obtenir une conclusion plus faible : f n'est peut-être pas un difféomorphisme, mais est un *difféomorphisme local.*

Théorème 3 (Théorème d'inversion locale)**.**
Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$. Soit $x \in U$ tel que D_xf est inversible.

Alors il existe un voisinage V de x et un voisinage W de $f(x)$ tel que $f_{|V}^{|W} : V \to W$ soit un difféomorphisme. Autrement dit, il existe $g \in \mathcal{C}^1(W, V)$ telle que $g \circ f(y) = y$ pour tout $y \in V$ et $f \circ g(z) = z$ pour tout $z \in W$.

Définition 3.2 (Difféomorphisme local)**.**
On appelle ***difféomorphisme local*** *une fonction $\mathcal{C}^1$ dont la dérivée est partout inversible.*

Une esquisse de preuve est la suivante :
- ▷ L'ensemble des matrices inversibles est ouvert et f est continue, donc D_yf est inversible pour tout y dans un voisinage de x.
- ▷ $f^{-1}(z)$ est l'unique solution y (proche de x) de l'équation $f(y) = z$. C'est par conséquent l'unique point fixe de la fonction $u \mapsto u - (D_xf)^{-1}(f(u) - z)$. Cette formule n'est pas prise au hasard ; il ne s'agit que de la transcription en dimension 1 de la méthode d'ajustement linéaire, qui est une variante de la méthode de Newton.
- ▷ La fonction la fonction $u \mapsto u - (D_xf)^{-1}(f(u) - z)$ est une contraction pour tout z dans un voisinage de $f(x)$.
- ▷ Le théorème de point fixe de Banach, et en particulier de sa dépendance en un paramètre, permet de conclure.

Au vu de la technicité de cette preuve, nous ne démontrerons pas le théorème d'inversion locale.

Exemple 3.3.
Revenons à l'Exemple 3.1 :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ (x,y) & \mapsto & (e^x\cos(y), e^x\sin(y)) \end{cases}.$$

Soit $w \in \mathbb{R}^2$ non nul. Alors il existe un voisinage W de w et une fonction $g : W \to \mathbb{R}^2$ telle que $f \circ g = id$.
On peut expliciter g. Posons $(u, v) = f(x, y)$.

2. En effet, $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ a un "trou", donc il y a des lacets à valeurs dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ qui ne sont pas contractibles, alors que tout lacet dans $\mathbb{R}^2$ est contractible.

- ▷ *Remarquons que* $\|f(x,y)\| = e^x$*, donc* $x = \ln \|f(x,y)\| = \frac{\ln(u^2+v^2)}{2}$.
- ▷ *De plus,* y *est une coordonnée angulaire du point* (u,v)*. On peut donc l'exprimer localement à l'aide de fonctions trigonométriques inverses. Par exemple, si* $y \in (-\pi/2, \pi/2)$*, alors* $y = \arcsin(\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}) = \arctan(v/u)$ *convient. On peut même être plus astucieux : si* $y \in (-\pi,\pi)$*, alors* $y = 2\arctan(\frac{v}{u+\sqrt{u^2+v^2}})$ *(formule utilisant la tangente de l'arc moitié). Si* y *n'appartient pas à cet intervalle, il faut adapter les formules, en utilisant des symétries et translations.*

On peut donc choisir pour V *une bande* $\mathbb{R} \times I$ *où* I *est un intervalle ouvert de longueur* 2π *et pour* W *le plan* $\mathbb{R}^2$ *privé d'une dmi-droite partant de l'origine. Dans l'exemple explicite ci-dessus, en particulier,* $V = \mathbb{R} \times (-\pi,\pi)$ *et* $W = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : \ x = 0, \ y \leq 0\}$*, qui sont donc deux ouverts difféomorphes.*

On ne peut pas choisir V *et* W *plus grands que cela : on n'aurait plus de détermination unique et continue de l'angle.*

3.3 Applications

3.3.1 Caractérisation des difféomorphismes

Grâce au théorème d'inversion locale, on dispose d'une caractérisation des difféomorphismes en dimension supérieure !

Théorème 4.
Soient U, V *deux ouverts de* $\mathbb{R}^n$ *et* $f : U \to V$*. Alors* f *est un difféomorphisme si et seulement si les trois conditions suivantes sont remplies :*
- ▷ f *est* $\mathcal{C}^1$ *;*
- ▷ f *est* ***bijective****;*
- ▷ $D_x f$ *est inversible pour tout* x*.*

Démonstration.
Une fois encore, le sens direct est immédiat : un difféomorphisme est par définition bijectif et $\mathcal{C}^1$, et sa différentielle est toujours inversible. Soit f satisfaisant les trois conditions. Alors f^{-1} est bien définie. Il reste à montrer que f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$.

Soit $y \in V$. Soit x tel que $f(x) = y$. Par le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage W_1 de x, un voisinage W_2 de y et $g \in \mathcal{C}^1(W_2, W_1)$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}$. Mais alors $g(z) = f^{-1}(z)$ pour tout $z \in W_2$, donc g est la restriction de f^{-1} à W_2. Par conséquent, f^{-1} est $\mathcal{C}^1$ sur W_2. Ceci étant vrai pour tout y, la fonction f^{-1} est $\mathcal{C}^1$ partout, donc $\mathcal{C}^1$. □

Ainsi, la seule différence par rapport aux intervalles est que, sur un intervalle, grâce au théorème des valeurs intermédiaires, la stricte monotonie (et donc la dérivée de signe constant) garantit l'injectivité. On vavait donc pu supprimer cette hypothèse, et supposer seulement que f était surjective. En dimension supérieure, ce n'est plus le cas (on a suffisamment de place pour "faire demi-tour"). Il ne faut donc pas omettre cette hypothèse.

Exercice 3.4. *Soit* $k \geq 1$ *et* $f : U \to V$ *et fonction de classe* $\mathcal{C}^k$ *qui est un difféomorphisme. En vous inspirant de la dimension* 1*, montrez que* f^{-1} *est de classe* $\mathcal{C}^k$*.*

3.3.2 Racine carrée de matrice symétrique définie positive

Soit U l'ensemble des matrices symétriques réelles définies positives (c'est-à-dire dont toutes les valeurs propres sont strictement positives). L'ensemble U est un ouvert de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Soit $f : U \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la fonction qui à une matrice M associe M^2. Cette fonction est à image dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$; en effet, si M est symétrique, alors $(M^2)^T = M^T M^T = (M^T)^2 = M^2$, donc $f(M)$ est symétrique. De plus, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ non nul,

$$\langle X, M^2 X\rangle = \langle M^T X, MX\rangle = \langle MX, MX\rangle = \|MX\|^2 > 0,$$

donc $f(M)$ est définie positive. Par conséquent, f est une application de $U \subset \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dans $U \subset \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. De plus, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Sa différentielle en $M \in U$ est :

$$D_M f(H) = MH + HM,$$

qui est bien une application linéaire de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Soit $H \in \mathrm{Ker}(D_M f) \subset \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors $HM = -MH$. Soit P une matrice de passage telle que $D = P^{-1}MP$ soit diagonale, de coefficients diagonaux $\lambda_i > 0$. Alors

$$\begin{aligned} P^{-1}HMP &= -P^{-1}MHP \\ P^{-1}HPD &= -DP^{-1}HP \end{aligned}$$

En particulier, pour tous i, j, on a $(P^{-1}HP)_{ij}\lambda_j = -\lambda_i(P^{-1}HP)_{ij}$. Comme λ_i et λ_j sont strictement positifs, on en déduit que $(P^{-1}HP)_{ij} = 0$ pour tous i, j, et donc que $P^{-1}HP = 0$. On a bien montré que $H = 0$. Donc $\mathrm{Ker}(D_M f) = \{0\}$, donc $D_M f$ est inversible.

On admet que toute matrice réelle symétrique positive admet une unique racine carrée qui soit symétrique définie positive [3]. Autrement dit, $f : U \to U$ est bijective.

Toutes les conditions sont donc remplies : $f : U \to U$ est un difféomorphisme $\mathcal{C}^\infty$. Par conséquent,

Proposition 3.5.
La fonction $\sqrt{\cdot}$, définie de U dans U, qui à un matrice symétrique définie positive associe sa racine carrée, et de classe $\mathcal{C}^\infty$.

3.3.3 Points fixes isolés

Le théorème d'inversion locale permet aussi d'étudier les points fixes d'une fonction :

Proposition 3.6.
Soit $f : U \to U$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et x un point fixe de f. Si $1 \notin Sp(D_x f)$, alors x est un point fixe isolé [4].

Démonstration.
Soit x un tel point fixe. Posons $g(y) := f(y) - y$. La fonction g est $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}^n$, et $g(x) = 0$. De plus, $D_x g = D_x f - I$; comme $1 \notin \mathrm{Sp}(D_x f)$, on en déduit que $D_x g$ est inversible. Par le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage V de x et un voisinage W de 0 tels que $g : V \to W$ soit un difféomorphisme. En particulier, x est le seul antécédent de 0 dans V, donc le seul point fixe de f dans V. □

Remarque 3.7.
Rappelons que ce lien entre points fixes et différentielle est particulièrement frappant dans le cadre des applications affines. En effet, soit $f : E \to E$ une application affine. Si $1 \notin Sp(\vec{f})$, alors f a une unique point fixe.

3. Obtenue par exemple en diagonalisant cette matrice dans une base orthonormée, et en prenant la racine carrée de ses valeurs propres.

4. C'est-à-dire que x est le seul point fixe de f dans un voisinage de x.

4 Fonctions analytiques complexes

Le but de cette partie est de revisiter les fonctions analytiques complexes, en faisant le lien avec les applications différentiables réelles.

4.1 Nombres complexes et transformations affines

L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ peut être vu comme le plan réel euclidien $\mathbb{R}^2$ muni d'une opération supplémentaire :

$$(x+iy)(x'+iy') = (xx'-yy') + i(xy'+x'y).$$

Soit $a = \alpha+i\beta$ un nombre complexe. Alors a agit par multiplication. En réécrivant l'égalité ci-dessus,

$$a\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x - \beta y \\ \beta x + \alpha y \end{pmatrix}.$$

Cette opération de multiplication par a est donc linéaire, de matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est de déterminant $\alpha^2+\beta^2 = |a|^2$, et est donc inversible si a est non nulle. Son inverse est alors la matrice associée à a^{-1}.

Considérons l'ensemble des matrices associées à des nombres complexes non nuls :

$$\mathrm{Conf} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix},\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \right\}.$$

Alors $\mathrm{Conf} = \mathbb{R}_+^* \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. En particulier, si $|a| = 1$, alors a agit par rotation sur $\mathbb{R}^2$.

Le groupe $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est le groupe des isométries directes du plan euclidien : une matrice de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ préserve l'orientation, les aires, les distances, et les angles orientés. En s'autorisant à multiplier par un réel strictement positif, on rajoute des dilatations. Ainsi, les matrices de Conf ne préservent plus les aires ni les distances. Cependant, elles préservent toujours l'orientation et les angles orientés. On dit que ce sont des **transformations conformes**.

En rajoutant la matrice nulle à Conf, on obtient un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix},\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

qui est bien isomorphe à $\mathbb{C}$.

Remarque 4.1 (Équations de Cauchy-Riemann du pauvre)**.**
La représentation de ce sous-espace vectorielle est paramétrique. On peut en donner une représentation implicite : un matrice A appartient à ce sous-espace si et seulement si $A_{11} = A_{22}$ et $A_{12} = -A_{21}$.

Plus généralement, les transformations de la forme $z \mapsto az + b$ avec $a \neq 0$ sont des transformations affines du plan qui préservent les angles orientés.

Exercice 4.2.
Décrivez de la même façon les transformations géométriques de la forme $z \mapsto a\overline{z} + b$.

4.2 Équations de Cauchy-Riemann

Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. En posant $f(x+iy) = \alpha(x,y) + i\beta(x,y)$, on peut voir f comme une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

La fonction f est dérivable en $z \in U$ au sens complexe si et seulement s'il existe un nombre complexe $f'(z)$ tel que

$$f(z+h) = f(z) + f'(z)h + o(|h|).$$

Autrement dit, on peut approcher f à l'ordre 1 en z par une transformation affine associée à un nombre complexe, donc par une transformation affine conforme.

Du point de vue réel,

$$\begin{pmatrix} \alpha(x+h,y+k) \\ \beta(x+h,y+k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(x,y) \\ \beta(x,y) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial \alpha}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial \beta}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial \beta}{\partial x}(x,y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + o(\sqrt{h^2+k^2}).$$

La fonction f est dérivable au sens complexe si et seulement si sa matrice jacobienne est associée à un nombre complexe, donc si et seulement si sa matrice jacobienne est conforme. La Remarque 4.1 permet d'en tirer

Théorème 5 (Équation de Cauchy-Riemann)**.**
Soit $f(x+iy) = \alpha(x,y) + i\beta(x,y)$ une transformation de classe $\mathcal{C}^1$. Alors f est $\mathcal{C}^1$ au sens complexe si et seulement si

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial \beta}{\partial y} \text{ et } .\frac{\partial \alpha}{\partial y} = -\frac{\partial \beta}{\partial x}.$$

On dit que f satisfait les ***équations de Cauchy-Riemann****.*

De plus, une application $\mathcal{C}^1$ au sens complexe est toujours développable en série entière en tout point [5], et en particulier $\mathcal{C}^\infty$. Cela montre la force des équations de Cauchy-Riemann : si une fonction $\mathcal{C}^1$ satisfait ces équations, alors elle est automatiquement $\mathcal{C}^\infty$.

Exemple 4.3. *Reprenons l'exemple $f(z) = e^z$. En coordonnées réelles, $f(x,y) = (e^x\cos(y), e^x\sin(y))$. Mais, comme nous l'avons déjà vu*

$$D_{x,y}f = \begin{pmatrix} e^x\cos(y) & -e^x\sin(y) \\ e^x\sin(y) & e^x\cos(y) \end{pmatrix} \in Conf,$$

qui vérifie bien les équations de Cauchy-Riemann. On remarque de plus que $\det(D_{x,y}f) = e^{2x} = |e^z|^2$.

4.3 Retour à la géométrie

5. c'est une conséquence de la formule de Cauchy