

---

## Fonctions de plusieurs variables réelles : Exercices

---

**Exercice 1.**

1. Soit  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^n$ . Dérivez, quand c'est possible, les fonctions  $x \mapsto \langle x, x \rangle$  et  $x \mapsto \|x\|$ .
2. Calculez la différentielle de l'application  $f : X \rightarrow X^2$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
3. Soit  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Définissons  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$g(x, y) := \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{si } x = y \end{cases} .$$

Montrez que  $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ .

**Exercice 2.** Soit  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ . Définissons

$$\varphi := \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto (f(x, y), 2xy) \end{cases} .$$

Déterminez une condition nécessaire et suffisante sur  $f$  pour que la différentielle de  $\varphi$  soit une similitude.

**Exercice 3.** Soit  $\alpha \geq 0$ . Étudiez la continuité, la différentiabilité, l'existence et la continuité des dérivées partielles en  $(0, 0)$  de la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(0, 0) = 0 \quad \text{et} \quad f(x, y) = (x^2 + y^2)^\alpha \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \quad \forall (x, y) \neq (0, 0).$$

**Exercice 4.** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$f(0, 0) = 0 \quad \text{et} \quad f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \quad \forall (x, y) \neq (0, 0).$$

1. Montrez que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .
2.  $f$  est-elle différentiable 2 fois sur  $\mathbb{R}^2$  ?

**Exercice 5.** Soient  $a \in \mathbb{R}^n$  et  $U$  un voisinage ouvert de  $a$ . Soit  $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ . Soit  $D_a f$  la différentielle en  $a$  de  $f$ . Soit  $Q(a)$  la forme quadratique dont la matrice dans la base canonique est de coefficients  $A_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$ , pour tous  $1 \leq i, j \leq n$ .

1. Soit  $u \in \mathbb{R}^n$ . Écrivez la formule de Taylor avec reste intégral en 0 de  $g : t \mapsto f(a + tu)$ .
2. Déduisez-en qu'il existe une fonction  $\varepsilon$  définie sur un voisinage de 0 dans  $\mathbb{R}^n$ , telle que  $\lim_0 \varepsilon = 0$  et, pour tout  $u$  suffisamment petit,

$$f(a + u) = f(a) + D_a f(u) + \frac{1}{2} Q(a)(u) + \|u\|^2 \varepsilon(u).$$

**Exercice 6.**

1. Étudiez la nature des points critiques (dégénérés ou non, extrema locaux ou non...) des trois fonctions suivantes :

$$f_1(x, y) = xy + x^4 - y^4 ; \quad f_2(x, y) = x^2 - y^3 ; \quad f_3(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2.$$

2. Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(x, y) = (1 - x)(1 - y)(x + y - 1)$ . Déterminez les points critiques de  $f$ . Parmi ces points, y a-t-il des extrema locaux ? Sont-ils stricts ? La fonction  $f$  admet-elle un minimum ou un maximum global sur  $\mathbb{R}^2$  ?

**Exercice 7.** On munit  $E = \mathbb{R}^n$  de sa structure euclidienne canonique. Soit  $f : E^n \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(v_1, \dots, v_n) = \det(v_1, \dots, v_n)^2$ .

1. Soient  $r_1, \dots, r_n > 0$ . Soit  $S := \{(v_1, \dots, v_n) \in E^n : \|v_1\| = r_1, \dots, \|v_n\| = r_n\}$ . Montrez que  $f|_S$  admet un maximum.
2. Soit  $(v_1, \dots, v_n) \in S$  un point maximisant  $f|_S$ . Montrez que  $(v_1, \dots, v_n)$  est une base orthogonale de  $E$ .
3. Déduisez-en que, pour tous  $v_1, \dots, v_n \in E$ ,

$$|\det(v_1, \dots, v_n)| \leq \|v_1\| \dots \|v_n\|.$$

**Exercice 8.**

1. Intégrez les équations aux dérivées partielles suivantes à l'aide des changements de variables entre parenthèses.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & (x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{u-v}{2}) \\ x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 0 & (u = x, v = y/x) \\ x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & (u = y/x, v = xy) \end{aligned}$$

2. Soit  $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Pour chacune des équations aux dérivées partielles ci-dessus, montrez qu'il existe une unique solution  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  telle que  $f(x, 0) = \varphi(x)$  et  $\partial_y f(x, 0) = 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 9.** Déterminez les fonctions  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , différentiables 2 fois, qui ne dépendent que de  $r = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$ , et dont le laplacien  $\Delta(f) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$  est identiquement nul.

**Exercice 10.** Montrez que l'intégrale  $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy$  converge. En passant en coordonnées polaires, calculez sa valeur, et déduisez-en la valeur de l'intégrale  $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$ .

**Exercice 11.** Calculez :

1.  $\iint_{\mathcal{R}} xy(3x + y) dx dy$  sur le rectangle  $\mathcal{R} = [0; 1] \times [-1; 2]$  ;
2.  $\iint_{\mathcal{D}} (x^2 + y^2) dx dy$  sur le domaine  $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 4 - x^2\}$  ;
3.  $\iint_{\mathcal{D}} (x^2 + y^2) dx dy$  sur le disque délimité par le cercle passant par l'origine et de centre  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ .