# Équation(s) de la chaleur

## Équation de la chaleur sur un anneau

Commençons par une remarque préliminaire. Se donner une fonction continue sur le cercle est équivalent à se donner une fonction continue $2\pi$-périodique sur $\mathbb{R}$. En effet, étant donnée $f : \mathbb{S}_1 \to \mathbb{R}$, la fonction $g : \ t \mapsto f((\cos(t), \sin(t)))$ est $2\pi$-périodique sur $\mathbb{R}$. Réciproquement, étant donnée une fonction $2\pi$-périodique $g$ sur $\mathbb{R}$, on peut poser $f((\cos(t), \sin(t))) := g(t)$ pour $t \in [0, 2\pi)$, et vérifier grâce à la périodicité de $g$ que la fonction $f$ ainsi définie est bien continue sur $\mathbb{S}_1$.

Par conséquent, il est équivalent de parler d'équation de la chaleur sur un cercle (ou un anneau), ou d'équation de la chaleur avec conditions au bord périodiques.

Soit $u_0$ une fonction continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux et $2\pi$-périodique. Une fonction $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ est une **solution de l'équation de la chaleur sur l'anneau avec condition initiale** $u_0$ si, pour une certaine constante $K > 0$ :

- $u$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ ;
- $u$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ ;
- Pour tout $t \geq 0$, la fonction $x \mapsto u(x, t)$ est $2\pi$-périodique ;
- $u(x, 0) = u_0(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ ;
- Sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

On peut noter aussi $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Delta u$.

Nous allons montrer :

**Théorème 1.**
*Pour une condition initiale $u_0$ continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux et $2\pi$-périodique, l'équation de la chaleur sur un anneau a une unique solution $u$. De plus, pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, en notant $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ les coefficients de Fourier exponentiels de $u_0$,*

$$u(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{-Kn^2 t} e^{inx}. \tag{1}$$

**Remarque 0.1.**
*Dans un contexte physique, la fonction $u_0$ est en général à valeurs réelles. Dans ce cas, les coefficients de Fourier $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ vérifient la relation $c_{-n} = \overline{c_n}$. Mais alors, à $t$ fixé, les coefficients $(c_n e^{-Kn^2 t})_{n \in \mathbb{Z}}$ vérifient la même relation :*

$$c_{-n} e^{-K(-n)^2 t} = \overline{c_n e^{-Kn^2 t}},$$

*donc $x \mapsto u(x, t)$ est elle aussi à valeurs réelles, donc $u$ est à valeurs réelles.*

*Une autre solution pour éviter cet écueil consisterait à travailler avec les coefficients de Fourier trigonométriques et non exponentiels (ce qui est un bon exercice !).*

**Remarque 0.2.**
*Quand $t$ tend vers $+\infty$, la fonction $x \mapsto u(x, t)$ converge uniformément vers la fonction constante égale à $c_0$, c'est-à-dire que la température converge partout vers la température moyenne sur l'anneau.*

**Remarque 0.3.**
*Si la condition initiale est moins régulière (par exemple seulement continue par morceaux), il faut changer la formulation de l'équation de la chaleur pour espérer avoir des solutions. Notamment, au lieu que la solution soit continue partout, elle ne sera continue que sur* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$*, et quand* $t$ *tend vers* $0$ *la convergence sera seulement en norme* $\mathbb{L}^2$ *(et non uniforme) vers* $u_0$*.*

**Exercice 0.4.**
*On change la taille du cercle : au lieu d'être de circonférence* $2\pi$*, il est de circonférence* $L$*. On travaille donc avec des fonctions* $L$*-périodiques et non* $2\pi$*-périodiques.*

*Exprimez* $u$ *à l'aide de séries de Fourier. Quel est, en fonction de* $K$ *et* $L$*, le temps caractéristique d'évolution du système ?*

## Analyse

Soit $u$ une solution de l'équation de la chaleur. Les fonctions $x \mapsto u(x,t)$ étant $2\pi$-périodiques, on va leurs décomposer en base de Fourier. Notons, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $t \geq 0$,

$$c_n(t) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x,t) e^{-inx} \, \mathrm{d}x.$$

Alors, formellement, pour tous $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(t) e^{inx}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n'(t) e^{inx}, \\ K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} -Kn^2 c_n(t) e^{inx}. \end{aligned}$$

En identifiant terme à terme, on a $c_n'(t) = -Kn^2 c_n(t)$, équation différentielle ordinaire ayant pour solution $c_n(t) = c_n(0) e^{-Kn^2 t}$. Finalement,

$$u(x,t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(0) e^{-Kn^2 t} e^{inx},$$

et $(c_n(0))_{n \in \mathbb{Z}}$ sont les coefficient de Fourier de $u_0$.

## Existence d'une solution

Posons, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_0(x) e^{-inx} \, \mathrm{d}x.$$

La fonction $u_0$ étant continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, ses coefficients de Fourier sont sommables. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Posons $f_n : (x,t) \mapsto c_n e^{-Kn^2 t} e^{inx}$ définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Alors $\|f_n\|_\infty = |c_n|$, donc la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Notons $u := \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n$. Alors :

- ▷ Chaque fonction $f_n$ est continue et la série converge normalement sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, donc $u$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.
- ▷ Soit $t \geq 0$. Chaque fonction $x \mapsto f_n(x,t)$ est $2\pi$-périodique, donc $x \mapsto u(x,t)$ est $2\pi$-périodique.
- ▷ La série de Fourier de $u_0$ converge uniformément vers $u_0$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$u_0(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} = u(x,0).$$

Montrons que $u$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. Pour cela, fixons $t_0 > 0$, et montrons que $u$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \times [t_0, +\infty)$. Chaque fonction $f_n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Il suffit de montrer que, pour tous $k$, $\ell \geq 0$ entiers,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \sup_{\mathbb{R} \times [t_0, +\infty)} \left| \frac{\partial^k}{\partial t^k} \frac{\partial^\ell}{\partial x^\ell} f_n \right| < +\infty.$$

Mais

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} \frac{\partial^\ell}{\partial x^\ell} f_n(x,t) = (-Kn^2)^k (in)^\ell c_n e^{-Kn^2 t} e^{inx},$$

donc

$$\sup_{\mathbb{R} \times [t_0, +\infty)} \left| \frac{\partial^k}{\partial t^k} \frac{\partial^\ell}{\partial x^\ell} f_n \right| = c_n K^k n^{2k+\ell} e^{-Kn^2 t_0},$$

et donc la condition recherchée est vérifiée par croissance comparée (la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable, donc bornée).

Il reste à vérifier l'équation de la chaleur à proprement parler. Le cacul précédent implique de plus que, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (-Kn^2) e^{-Kn^2 t} e^{inx},$$
$$K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n K (in)^2 e^{-Kn^2 t} e^{inx},$$

et donc $\frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

## Unicité de la solution

Nous allons maintenant démontrer l'unicité de la solution de l'équation de la chaleur. Remarquons dans un premier temps que si $u_1$, $u_2$ sont deux solutions avec même condition initiale $u_0$, alors par linéarité de l'équation, $(u_1 - u_2)$ est solution de l'équation avec condition initiale 0. Il suffit donc de montrer l'unicité de la solution de l'équation de la chaleur avec condition initiale 0.

Nous allons pour cela utiliser une *estimée d'énergie*. Soit $u$ une solution de l'équation de la chaleur. Posons, pour tout $t \geq 0$,

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} u(x,t)^2 \, \mathrm{d}x. \tag{2}$$

Comme $u$ est à valeurs réelles, $E$ est positive sur $\mathbb{R}_+$.

L'intervalle $[0, 2\pi]$ est compact et la fonction $(x,t) \mapsto \frac{u(x,t)^2}{2}$ est continue sur $[0, 2\pi] \times \mathbb{R}_+$. Par continuité des intégrales à paramètre dans le cas compact, la fonction $E$ est elle aussi continue sur $\mathbb{R}_+$.

De même [1], l'intervalle $[0, 2\pi]$ est compact et la fonction $(x,t) \mapsto \frac{u(x,t)^2}{2}$ est de classe [2] $\mathcal{C}^1$ sur

1. Le même argument montre en fait que $E$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. En fait, on utilise ici seulement le fait que $\frac{\partial u}{\partial t}$ existe et est continue, ce qui est plus faible qu'être de classe $\mathcal{C}^1$.

$[0,2\pi] \times \mathbb{R}_+^*$, donc la fonction $E$ est elle aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $t > 0$,

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_0^{2\pi} u(x,t) \cdot \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{2\pi} u(x,t) \cdot K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\, \mathrm{d}x \\ &= K \left( \left[ u(x,t) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\, \mathrm{d}x \right). \end{aligned}$$

Or $x \mapsto u(x,t)$ est $2\pi$-périodique, donc $x \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ aussi et $u(0,t) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = u(2\pi,t) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(2\pi,t)$. Par conséquent,

$$E'(t) = -K \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 (x,t)\, \mathrm{d}x \leq 0$$

La fonction $E$ est donc continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et de dérivée négative sur $\mathbb{R}_+^*$, donc est décroissante.

En particulier, si $u$ est solution de l'équation de la chaleur sur l'anneau avec condition initiale 0, alors $E(0) = 0$, et $E$ étant positive et décroissante, $E(t) = 0$ pour tout $t$. Donc, pour tout $t$, la fonction $x \mapsto u(x,t)^2$ est continue et d'intégrale nulle, donc identiquement nulle. Donc $u = 0$ partout.

**Équation de la chaleur sur un intervalle**

Une autre configuration étudiée par Joseph Fourier est celle de la chaleur diffusant sur une barre, avec conditions au bord de Dirchlet : on fixe la température aux extrémités de la barre.

Soient $T_0$, $T_\pi$ deux réels. Soit $u_0$ une fonction continue sur $[0, T_\pi]$, $\mathcal{C}^1$ par morceaux, et telle que $u_0(0) = T_0$ et $u_0(\pi) = T_\pi$. Une fonction $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ est une **solution de l'équation de la chaleur sur l'intervalle avec condition initiale $u_0$ et conditions au bord de Dirichlet** si, pour une certaine constante $K > 0$ :

- ▷ $u$ est continue sur $[0,\pi] \times \mathbb{R}_+$ ;
- ▷ $u$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,\pi] \times \mathbb{R}_+^*$ ;
- ▷ Pour tout $t \geq 0$, on a $u(0,t) = T_0$ et $u(\pi,t) = T_\pi$ ;
- ▷ $u(x,0) = u_0(x)$ pour tout $x \in [0,\pi]$ ;
- ▷ Sur $[0,\pi] \times \mathbb{R}_+^*$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Nous allons montrer :

**Théorème 2.**
*Pour une condition initiale $u_0$ continue sur $[0, T_\pi]$, $\mathcal{C}^1$ par morceaux, et telle que $u_0(0) = T_0$ et $u_0(\pi) = T_\pi$, l'équation de la chaleur sur l'intervalle avec conditions au bord de Dirichlet a une unique solution $u$.*

## Démonstration

Dans un premier temps, remarquons que la fonction $(x,t) \mapsto T_0 + \frac{T_\pi - T_0}{\pi} x$ est solution de l'équation de la chaleur avec conditions au bord de Dirchlet et condition initiale $u_0(x) = T_0 + \frac{T_\pi - T_0}{\pi} x$.

En retranchant cette solution, il suffit de montrer l'existence et l'unicité d'une solution si $T_0 = T_\pi = 0$, hypothèse que nous ferons à partir de maintenant. En particulier, $u_0(0) = u_0(\pi) = 0$.

Nous allons utiliser une astuce dûe à Joseph Fourier. Soit $v_0$ la fonction $2\pi$-périodique telle que $v_0(x) = u_0(x)$ pour tout $x \in [0,\pi)$, et $v_0(x) = -u_0(2\pi - x)$ pour tout $x \in [\pi, 2\pi)$. Alors $v_0$ est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Par l'étude de l'équation de la chaleur sur un anneau, il existe une unique fonction $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ telle que :

- ▷ $u$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ ;
- ▷ $u$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ ;
- ▷ Pour tout $t \geq 0$, la fonction $x \mapsto u(x,t)$ est $2\pi$-périodique ;
- ▷ $u(x,0) = v_0(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ ;
- ▷ Sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Il suffit alors de montrer que $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ pour tout $t \geq 0$ ; si c'est le cas, la restriction de $u$ à $[0,\pi] \times \mathbb{R}_+$ conviendra.

On procède par un argument de symétrie. La fonction $(x,t) \mapsto -u(2\pi - x, t)$ est aussi solution de l'équation de la chaleur sur l'anneau avec condition initiale $v_0$ (elle satisfait les cinq conditions ci-dessus). Par unicité des solutions, cette fonction est égale à $u$. Soit $t \geq 0$. En prenant $x = 0$, on obtient $u(0,t) = -u(2\pi,t) = -u(0,t)$, donc $u(0,t) = 0$. De même, en prenant $x = \pi$, on obtient $u(\pi,t) = -u(\pi,t)$, donc $u(\pi,t) = 0$.

Par conséquent, la restriction de $u$ à $[0,\pi] \times \mathbb{R}_+$ convient.

Finalement, on peut calculer les coefficients de Fourier de $u$. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_0(x) \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} u_0(x) e^{-inx} \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2\pi} \int_\pi^{2\pi} \left[-u_0(2\pi - x)\right] e^{-inx} \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} u_0(x) e^{-inx} \,\mathrm{d}x - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} u_0(x) e^{-in(2\pi - x)} \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} u_0(x) (e^{-inx} - e^{inx}) \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{-i}{\pi} \int_0^{\pi} u_0(x) \sin(nx) \,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

de telle sorte que $c_0 = 0$ et, pour tout $n \geq 1$ et $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}
c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} u_0(y) \sin(ny) \,\mathrm{d}y \left[-ie^{inx} + ie^{-inx}\right] \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u_0(y) \sin(ny) \,\mathrm{d}y \cdot \sin(nx)
\end{aligned}$$

Par conséquent, si les conditions au bord sont $T_0 = T_\pi = 0$, alors pour tout $(x,t) \in [0,\pi] \times \mathbb{R}_+$,

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{\pi} u_0(y) \sin(ny) \,\mathrm{d}y \cdot e^{-Kn^2 t} \sin(nx).$$

En particulier, il existe une constante $C$ telle que $|u(x,t)| \leq Ce^{-Kt}$ pour tout $(x,t)$ : la température converge à vitesse exponentielle vers 0.