Séries entières : exercices

Exercice 1. Donnez le rayon de convergence et, quand elles sont définies, calculez les sommes suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!} z^n \ ; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n+1)}{(n-1)!} z^{n-1} \ ; \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 - 5n + 6) z^n \ ;$$

Exercice 2. [Moi, Exercice C.7 p. 87]
Soit $f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n+in^2 x}$.

1. Montrez que f est bien définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrez que le rayon de convergence de la série de Taylor de f est nul.
3. Pour quels nombres complexes x la série ci-dessus converge-t-elle ?

Exercice 3. [Inégalités de Cauchy]
$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et f sa somme. Pour tout $r \in [0, R)$, on pose $M(r) := \max_{|z|=r} |f(z)|$.

1. Justifiez l'existence de $M(r)$.
2. Calculez l'intégrale
$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-int} \, \mathrm{d}t.$$
3. Déduisez-en que, pour tout $n \geq 0$ et tout $r \in (0, R)$,
$$|a_n| \leq M(r) r^{-n}.$$
4. Application : Montrez que $n! \geq (n/e)^n$ pour tout $n \geq 1$.
5. Application : Montrez que, si $R = +\infty$ et f est bornée sur $\mathbb{C}$, alors f est constante (théorème de Liouville). Que peut-on dire si on suppose seulement que $R = +\infty$ et $|f(z)| = O(|z|^p)$ pour un entier $p \geq 0$?

Comportement au rayon de convergence

Exercice 4. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle positive. On suppose que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est supérieur ou égal à 1. On définit $f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour $x \in (-1, 1)$. Montrez que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- ▷ $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge ;
- ▷ $f(x)$ a une limite finie quand x tend vers 1 par valeurs inférieures.

Le cas échéant, comparer $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ et $\lim_{x\to 1^-} f(x)$.

Exercice 5. [Moi, Exercice B.5 p. 83]

1. On considère deux séries entières de rayon de convergence 1 définissant deux fonctions $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ sur $(-1, 1)$. On suppose que (a_n) est positive, que $a_n \sim_{n\to+\infty} b_n$ et que $\sum_{n=0}^{+\infty}$ diverge. Montrez que $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$ et que $f(x) \sim_{x\to 1^-} g(x)$.
2. Application : Donnez un équivalent au voisinage de 1 de $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^k x^n$ où k est un entier positif.

3. Donnez un résultat similaire pour des séries entières de rayon de convergence infini.

Équations différentielles

Exercice 6. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par récurrence par $a_0 = a_1 = 1$ et $a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{2}{n+2}a_n$ pour tout $n \geq 0$.

1. Montrez que $(a_n)_{n\geq 0}$ est croissante et que, pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq a_n \leq n^2.$$

   Déduisez-en le rayon de convergence de la série entière $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

2. Montrez que f est solution de l'équation différentielle $(1-x)y'(x) = (1+2x)y(x)$ avec condition initiale $y(0) = 1$ sur $(-1, 1)$. Déduisez-en une formule explicite pour f.

Exercice 7. [Moi, Exercice E.4 p. 93]
On définit pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction J_0 par :

$$J_0(x) := \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(x \sin(t)\right)\, \mathrm{d}t.$$

1. Montrez que J_0 est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0$ avec condition initiale $y(0) = 1$.
2. Développez J_0 en série entière en 0.
3. Montrez que $\lim_{x\to+\infty} J_0(x) = 0$.

Combinatoire

Exercice 8. On appelle nombres de Catalan les éléments de la suite $(C_n)_{n\geq 0}$ définie par l'équation de récurrence $C_0 = 1$ et $C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$ pour tout $n \geq 0$.

1. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Montrez que $a_n = C_n$ pour tout n si et seulement si $f(0) = 1$ et $(f(z))^2 = \frac{f(z)-1}{z}$.
2. Trouvez une fonction f remplissant les conditions ci-dessus, et déduisez-en une formule explicite pour C_n.

Exercice 9. [Moi, Exercice E.6 p. 94]
Pour tout $n \geq 1$, on note P_n le nombre de partitions de l'ensemble $\{1, \cdots, n\}$. On pose $P_0 := 1$.

1. Montrez que $P_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k$ pour tout $n \geq 0$.
2. On pose $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P_n}{n!} z^n$. Montrez que cette série entière a un rayon de convergence au moins égal à 1.
3. Déterminez une équation différentielle vérifiée par f. Déduisez-en une expression explicite de f, puis de $(P_n)_{n\geq 0}$.