

---

**Leçon 209 : Différentes formules de Taylor  
pour une fonction d'une variable réelle. Applications.  
Notes de cours.**

---

## Table des matières

<b>1 Comparaisons de fonctions</b>	<b>2</b>
1.1 Définitions . . . . .	2
1.2 Implications . . . . .	3
1.3 Négligeabilité . . . . .	3
1.4 Équivalence . . . . .	3
1.5 Domination . . . . .	4
1.6 Intégration . . . . .	4
<b>2 Formules de Taylor</b>	<b>5</b>
2.1 Formule de Taylor-Young . . . . .	5
2.1.1 Un énoncé plus général . . . . .	6
2.1.2 Applications élémentaires . . . . .	6
2.2 Formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral . . . . .	6
2.2.1 Un énoncé plus général . . . . .	8
2.3 Inégalité de Taylor-Lagrange . . . . .	8
2.3.1 Un énoncé plus général . . . . .	9
2.3.2 Applications élémentaires . . . . .	10
2.4 Formule de Taylor-Lagrange . . . . .	10
2.4.1 Un énoncé plus général . . . . .	11
<b>3 Applications possibles</b>	<b>12</b>
3.1 Application 1 : Points de rebroussement . . . . .	12
3.2 Application 2 : Théorème de Bernstein . . . . .	13
3.3 Application 3 : Théorème de division . . . . .	15
3.4 Application 4 : Intégration numérique : méthodes des rectangles, des trapèzes... . . . .	16
3.5 Application 5 : Caractérisation des fonctions polynômiales . . . . .	16
3.6 Application 6 : Inégalités de Landau–Kolmogorov et de Kolmogorov . . . . .	18
3.6.1 Inégalités de Landau–Kolmogorov . . . . .	18
3.6.2 Inégalité de Kolmogorov $\mathbb{L}^2$ . . . . .	20
3.6.3 Saturation des inégalités de Landau–Kolmogorov . . . . .	22
3.6.4 Inégalités de Kolmogorov . . . . .	23
3.6.5 Analyse dimensionnelle . . . . .	24
<b>4 Références</b>	<b>24</b>

Dans toute la leçon,  $I$  désigne un segment réels non réduit à un point et  $n, d$  deux entiers naturels.

## 1 Comparaisons de fonctions

### 1.1 Définitions

Soit  $f, g$  deux fonctions définies au voisinage d'un point  $a$  (potentiellement infini). Il existe différentes façons de comparer ces deux fonctions.

**Définition 1.1** (Négligeabilité et prépondérance).

On dit que  $f$  est **négligeable** devant  $g$  en  $a$  si, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un voisinage de  $a$  sur lequel

$$|f| \leq \varepsilon |g|.$$

On note alors  $f =_a o(g)$ .

Si  $g$  ne s'annule pas sur un voisinage de  $a$ , une fonction  $f$  est négligeable devant  $g$  si et seulement si  $\lim_a \frac{f}{g} = 0$ .

**Définition 1.2** (Équivalence).

On dit que  $f$  est **équivalente** à  $g$  en  $a$  si

$$f - g =_a o(g).$$

On note alors  $f \sim_a g$ .

Si  $g$  ne s'annule pas sur un voisinage de  $a$ , une fonction  $f$  est équivalente à  $g$  si et seulement si  $\lim_a \frac{f}{g} = 1$ .

**Définition 1.3** (Domination).

On dit que  $f$  est **dominée** par  $g$  en  $a$  s'il existe une constante  $C > 0$  et un voisinage de  $a$  sur lequel

$$|f| \leq C|g|.$$

On note alors  $f =_a O(g)$ .

Si  $g$  ne s'annule pas sur un voisinage de  $a$ , une fonction  $f$  est équivalente à  $g$  si et seulement si  $\frac{f}{g}$  est bornée au voisinage de  $a$ .

**Définition 1.4** (Grand Thêta).

S'il existe une constante  $C > 0$  et un voisinage de  $a$  sur lequel

$$\frac{1}{C}|g| \leq |f| \leq C|g|,$$

on note  $f =_a \Theta(g)$ .

Cette dernière notion revient à dire que  $f =_a O(g)$  et  $g =_a O(f)$ . Elle se retrouve fréquemment en informatique, et plus précisément dans l'analyse des classes de complexité algorithmique. Elle est beaucoup plus rare dans les textes de mathématique hors informatique. Cette notation sera peu (ou pas) réutilisée dans ces notes.

## 1.2 Implications

Les implications suivantes sont élémentaires :

- ▷ Si  $f =_a o(g)$ , alors  $f =_a O(g)$ .
- ▷ Si  $f \sim_a g$ , alors  $f =_a O(g)$ .
- ▷ Si  $f =_a \Theta(g)$ , alors  $f =_a O(g)$ .
- ▷ Si  $f =_a O(g)$  et  $g =_a O(f)$ , alors  $f =_a O(g)$ .

Il faut faire attention aux autres cas. On pourrait penser que si  $f \sim_a g$ , alors  $f \neq_a o(g)$ ; mais il y a des contre-exemples stupides à prendre en compte (si  $f = g = 0$  sur un voisinage de  $a$ ).

## 1.3 Négligeabilité

Nous laissons le lecteur vérifier les deux propositions suivantes :

### Proposition 1.5.

La relation “être négligeable devant” est transitive : si  $f =_a o(g)$  et  $g =_a o(h)$ , alors  $f =_a o(h)$ .

### Proposition 1.6.

Soit  $U$  un voisinage de  $a$  et  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ .

L'ensemble des fonctions définies sur  $U$  et négligeables en  $a$  devant  $g$  est un espace vectoriel.

Le choix du second énoncé cache une subtilité : deux fonctions que l'on compare en  $a$  ne sont pas nécessairement définies sur le même voisinage, ce qui poserait des problèmes pour définir leur somme. Une solution plus propre passerait par la définition de *germes de fonctions* ; ceci dit, ceux-ci rajoutent une couche d'abstraction supplémentaire pour un gain (à notre niveau) faible.

## 1.4 Équivalence

Il n'est pas si évident de démontrer que

### Proposition 1.7.

La relation “être équivalent à” est une relation d'équivalence.

*Démonstration.*

La réflexivité est immédiate.

Soient  $f, g$  telles que  $f \sim_a g$ . En choisissant  $\varepsilon = 1/2$ , on montre qu'il existe un voisinage de  $a$  sur lequel  $|f - g| \leq |g|/2$ , donc  $|f| \geq |g|/2$ . Par conséquent,  $f - g =_a o(g) =_a o(f)$ , donc  $g \sim_a f$ .

Soient  $f, g, h$  telles que  $f \sim_a g$  et  $g \sim_a h$ . Alors  $f - g =_a o(g)$  et  $g - h =_a o(g)$ , donc  $f - h =_a o(g) =_a o(h)$ , donc  $f \sim_a h$ .  $\square$

La proposition suivante découle directement de la définition.

### Proposition 1.8.

Soit  $U$  un voisinage de  $a$  et  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ .

L'ensemble des fonctions définies sur  $U$  et équivalentes en  $a$  à  $g$  est un espace affine, dont la direction est  $\{h : U \rightarrow \mathbb{R} : h = o(g)\}$ .

En particulier, les barycentres *finis* de fonctions équivalentes à  $g$  (et définies sur un même ouvert) sont équivalentes à  $g$ .

**Attention :** On ne peut pas sommer les équivalents ! Si  $f \sim_a g$  et  $h \sim_a k$ , il n'est pas certain que  $f + g \sim_a g + k$ , à cause de phénomènes de compensation. Par exemple,  $1 + x \sim_0 1 + x^2$  et  $-1 \sim_0 -1$ , mais il est faux que  $x \sim_0 x^2$ .

## 1.5 Domination

Nous laissons le lecteur vérifier les deux propositions suivantes :

### Proposition 1.9.

La relation “être dominé par” est réflexive et transitive : si  $f =_a O(g)$  et  $g =_a O(h)$ , alors  $f =_a O(h)$ .

La relation “grand Thêta” est une relation d’équivalence.

### Proposition 1.10.

Soit  $U$  un voisinage de  $a$  et  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ .

L’ensemble des fonctions définies sur  $U$  et dominées  $a$  devant  $g$  est un espace vectoriel.

## 1.6 Intégration

Nous ne listerons pas toutes les propriétés des relations de comparaison, du type  $O(o(h)) = o(h)$  (autrement dit, si  $f =_a O(g)$  et  $g =_a o(h)$  alors  $f =_a o(h)$ ). Nous ne listerons pas non plus toutes les propriétés non vérifiées par ces relations (attention par exemple aux compositions, et ne pas dériver ces relations).

Une des propriétés intéressantes de ces relations est d’être stable par intégration. Notons ici<sup>1</sup>  $\int_a f$  la primitive s’annulant en  $a$  d’une fonction  $f$ .

### Proposition 1.11.

Soient  $f, g$  définies au voisinage d’un point  $a \in \bar{R}$  et continues par morceaux sur ce voisinage.

Supposons que  $g$  est de signe constant de chaque côté de  $a$ . Alors :

- ▷ Si  $f =_a o(g)$ , alors  $\int_a f =_a o\left(\int_a g\right)$ .
- ▷ Si  $f \sim_a g$ , alors  $\int_a f \sim_a \int_a g$ .
- ▷ Si  $f =_a O(g)$ , alors  $\int_a f = O\left(\int_a g\right)$ .
- ▷ Si  $f =_a \Theta(g)$ , alors  $\int_a f = \Theta\left(\int_a g\right)$ .

*Démonstration.*

Démontrons le premier item. Soit  $\varepsilon > 0$ . Pour tout  $x$  suffisamment proche de  $a$ ,

$$|f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|,$$

d’où, pour tout  $x$  suffisamment proche de  $a$ ,

$$\left| \int_a^x f(t) dt \right| \leq \int_a^x |f(t)| dt \leq \varepsilon \int_a^x |g(t)| dt = \varepsilon \left| \int_a^x g(t) dt \right|,$$

où la condition sur le signe de  $g$  est utilisée pour obtenir la dernière égalité.

La propriété sur les équivalents découle de celle sur la négligeabilité : si  $f \sim_a g$ , alors

$$\begin{aligned} f - g &=_a o(g), \\ \int_a f - \int_a g &=_a o\left(\int_a g\right), \end{aligned}$$

donc  $\int_a f \sim_a \int_a g$ .

Les deux derniers items se démontrent de la même façon que le premier item. □

### Exercice 1.12.

Trouver des contre-exemples à la proposition précédente si l’on enlève l’hypothèse sur le signe de  $g$ .

---

1. Notation non standard, mais qui allège substantiellement l’énoncé qui suit.

## 2 Formules de Taylor

Avant tout, j'aimerais aborder (très subjectivement !) les énoncés de beaucoup de manuels de niveau licence et agrégation. Sur certains points, ceux-ci cherchent une généralité optimale. En particulier, pour les formules de Taylor, beaucoup mentionnent des hypothèses portant sur des fonctions “dérivables partout”, voire “de classe  $\mathcal{C}^k$  et dont la dérivée  $k$ -ième est dérivable partout”.

Pendant ma carrière, je n'ai rencontré de fonction dérivable partout mais non  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  qu'une seule fois : comme contre-exemple dans mon premier cours sur les dérivées. Ce type de fonction est suffisamment rare pour pouvoir être ignoré en première<sup>2</sup> intention. Autrement dit, il est raisonnable de se restreindre aux fonctions de classe  $\mathcal{C}^n$ .

L'avantage de cette restriction est de simplifier grandement de nombreuses démonstrations. Par exemple, le théorème des accroissements finis (valable pour des fonctions dérivables partout) peut en général être remplacé par le théorème fondamental de l'analyse (qui demande une dérivée typiquement continue).

Nous donnerons donc deux présentations de certains des théorèmes de Taylor. La première s'appliquera à des fonctions de classe  $\mathcal{C}^n$ . L'autre, en tant que tribu à tant de ressources de l'agrégation, aura des hypothèses plus fines. La lectrice pourra comparer la complexité des démonstrations.

**Attention :** L'utilisation d'énoncés plus ou moins généraux peut changer la logique du plan. Si l'on utilise uniquement des fonctions de classe  $\mathcal{C}^n$ , la formule de Taylor avec reste intégral joue un rôle central. Sinon, il faut utiliser des stratégies de démonstration parfois très différentes !

### 2.1 Formule de Taylor-Young

La formule de Taylor-Young est un résultat local au voisinage d'un point  $a$ . Elle fournit des résultats asymptotiques (typiquement des développements limités).

**Théorème 1** (Formule de Taylor-Young).

Soit  $f : I \rightarrow E$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$ . Pour tout  $a \in I$ ,

$$f(a+h) =_0 \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o(h^n).$$

*Démonstration.*

On procède par récurrence sur  $n$ . Pour  $n = 1$ , c'est la définition de la dérivabilité de  $f$  en  $a$ .

Supposons la formule de Taylor-Young valable à un certain rang  $n \geq 1$ . Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$ , telle que  $f^{(n)}$  soit dérivable en  $a$ . En appliquant l'hypothèse de récurrence à  $f'$ , on obtient

$$f'(a+h) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!} h^k =_0 o(h^n).$$

Comme  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , le membre de gauche ci-dessus est continu, donc intégrable au voisinage de  $a$ . Grâce à la Proposition 1.11, on peut intégrer la relation de négligeabilité :

$$f(a+h) - f(a) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!} h^{k+1} =_0 o(h^{n+1}),$$

ce qu'il fallait démontrer. □

---

2. et seconde...

### 2.1.1 Un énoncé plus général

On peut affiner l'hypothèse sur la fonction que l'on développe.

**Théorème 2** (Formule de Taylor-Young, bis).

Soit  $f : I \rightarrow E$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^{n-1}$  sur  $I$ . Soit  $a \in I$  un point tel que  $f^{(n-1)}$  soit dérivable en  $a$ . Alors

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o(h^n).$$

La démonstration en est identique, et ce raffinement peut avoir son utilité. Il n'est par exemple pas si extraordinaire de trouver des fonctions  $\mathcal{C}^1$  admettant une dérivée seconde en un point.

**Remarque 2.1.**

Pour  $n = 1$ , on retrouve la définition de la dérivabilité en un point  $a$ .

### 2.1.2 Applications élémentaires

On peut grâce à la formule de Taylor-Young obtenir des développements limités. Par exemple,

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+2}).$$

En particulier, on peut obtenir des développements limités à l'ordre 0, c'est-à-dire calculer des limites. Par exemple,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - x}{\sin(x) - x} = 2.$$

On peut aussi trouver des équivalences de certaines suites. Par exemple, en posant  $u_n = 2^n \sin(2^{-n}\pi)$ , on calcule  $u_n = \pi + o(2^{-n})$ , et ainsi on obtient des approximations de  $\pi$ . En effet, les valeurs successives de la suite  $u_n$  se calculent par une récurrence :  $u_n$  est la moitié du périmètre d'un polygone régulier à  $2^n$  côtés inscrit dans le cercle unité. Soit  $v_n = 2^n \tan(2^{-n}\pi)$  la moitié du périmètre d'un polygone régulier à  $2^n$  côtés inscrit dans le cercle unité. Alors :

$$v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \text{ et } u_{n+1} = \sqrt{u_n v_{n+1}}.$$

Le développement asymptotique de  $(u_n)$  donne la vitesse de convergence de la suite  $(u_n)$  vers  $\pi$ . Cette application est présentée plus en détail dans [Moi, Exercice B.1 p. 283].

Le principal inconvénient de la formule de Taylor-Young est de ne pas fournir de majoration de l'erreur, ce que les autres formules pallient.

## 2.2 Formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral

Dans des cas simples, la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral joue un rôle pivot.

**Théorème 3** (Formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral).

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$ . Alors

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!} (b-t)^{n-1} dt.$$

La démonstration en est particulièrement simple : une récurrence sans astuce notable.

*Démonstration.*

Quitte à travailler coordonnée par coordonnée, on peut supposer que les fonctions considérées sont à valeurs réelles. On procède par récurrence sur  $n$ . Pour  $n = 1$ , c'est le théorème fondamental de l'analyse.

Supposons la formule de Taylor-Young valable à un certain rang  $n$ . Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$ . En appliquant l'hypothèse de récurrence à  $f'$ , on obtient pour tout  $t \in [a, b]$

$$f'(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!} (s-a)^k + \int_a^t \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n-1)!} (t-s)^{n-1} ds.$$

En intégrant cela entre  $a$  et  $b$ , on obtient

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \int_a^t \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n-1)!} (t-s)^{n-1} ds dt.$$

De plus, en utilisant le théorème de Fubini (ce qui est possible car la fonction  $(s, t) \mapsto \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n-1)!} (t-s)^{n-1}$  est continue et le domain d'intégration borné),

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_a^t \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n-1)!} (t-s)^{n-1} ds dt &= \int_a^b f^{(n+1)}(s) \int_s^b \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} dt ds \\ &= \int_a^b f^{(n+1)}(s) \left[ \frac{(t-s)^n}{n!} \right]_s^b ds \\ &= \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(s)}{n!} (b-s)^n ds, \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. □

### Remarque 2.2.

La formule de Taylor-Young peut aussi se déduire de la formule de Yalor-Lagrange avec reste intégral. En effet, cette dernière se réécrit

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k + \int_0^h \frac{f^{(n)}(x+t) - f^{(n)}(x)}{(n-1)!} (h-t)^{n-1} dt.$$

Posons  $\omega(h) := \sup_{t \in [0, h]} |f^{(n)}(x+t) - f^{(n)}(x)|$ . On peut alors majorer le terme d'erreur :

$$\left| \int_0^h \frac{f^{(n)}(x+t) - f^{(n)}(x)}{(n-1)!} (h-t)^{n-1} dt \right| \leq \omega(h) \frac{|h|^n}{n!},$$

qui est en  $o(h^n)$  car  $\lim_{0+} \omega = 0$ .

Il est aussi possible d'utiliser le changement de variable  $u = t/h$  :

$$\int_0^h \frac{f^{(n)}(x+t) - f^{(n)}(x)}{(n-1)!} (h-t)^{n-1} dt = h^n \int_0^1 \frac{f^{(n)}(x+hu) - f^{(n)}(x)}{(n-1)!} (1-u)^{n-1} du,$$

suivi du théorème de convergence dominée (avec majoration par  $u \mapsto \frac{2\|f^{(n)}\|_\infty}{n!} (1-u)^{n-1}$ , où  $\|f^{(n)}\|_\infty$  est le supremum de  $f^{(n)}$  sur un intervalle  $[x-\delta, x+\delta]$  fixé).

### Remarque 2.3.

Les formules de Taylor sont toutes dimensionnellement cohérentes ! Cela se voit particulièrement bien avec la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral. Si l'on impose comme unités la seconde pour la variable de départ et le mètre pour celle d'arrivée, alors  $f^{(k)}$  est en  $m \cdot s^{-k}$ , donc chaque terme  $\frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k$  est en  $m$ . De même,  $\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!} (b-t)^{n-1}$  est en  $m \cdot s^{-1}$ , donc  $\int_a^b \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!} (b-t)^{n-1} dt$  est en  $m$ .

Ceci permet de retrouver facilement les différents ordres de dérivation et puissances apparaissant dans la formule, mais n'aide pas pour les factorielles.

#### 2.2.1 Un énoncé plus général

Si l'on n'a pas peur des intégrales au sens de Bochner, l'inégalité de Taylor-Lagrange s'applique à des espaces de Banach :

**Théorème 4** (Formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral, bis).

Soit  $E$  un espace de Banach. Soit  $f : [a, b] \rightarrow E$  une fonction de classe  $C^n$  sur  $[a, b]$ . Alors

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!} (b-t)^{n-1} dt.$$

### 2.3 Inégalité de Taylor-Lagrange

L'inégalité de Taylor-Lagrange permet de majorer globalement l'erreur dans la formule de Taylor-Young. Elle est moins précise que l'inégalité de Taylor-Lagrange, mais est en pratique souvent suffisante, et admet des versions marginalement plus générales.

**Théorème 5** (Inégalité de Taylor-Lagrange).

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$  une fonction de classe  $C^n$ . Alors

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right\| \leq \left( \max_{[a,b]} \|f^{(n)}\| \right) \frac{(b-a)^n}{n!}.$$

La formule reste vraie si  $b < a$  et  $f : [b, a] \rightarrow \mathbb{R}^d$ .

*Démonstration.*

D'après la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral,

$$\begin{aligned} \left\| f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right\| &= \left\| \int_a^b \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!} (b-t)^{n-1} dt \right\| \\ &\leq \int_a^b \frac{\|f^{(n)}\|(t)}{(n-1)!} (b-t)^{n-1} dt \\ &\leq \left( \max_{[a,b]} \|f^{(n)}\| \right) \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt \\ &= \left( \max_{[a,b]} \|f^{(n)}\| \right) \frac{(b-a)^n}{n!}. \quad \square \end{aligned}$$

### 2.3.1 Un énoncé plus général

**Théorème 6** (Inégalité de Taylor-Lagrange, bis).

Soit  $E$  un espace vectoriel normé. Soit  $f : [a, b] \rightarrow E$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^{n-1}$  sur  $[a, b]$  et telle que  $f^{(n-1)}$  soit dérivable sur  $(a, b)$ . Supposons de plus que  $\|f^{(n)}\|$  soit majorée par un réel  $M$ . Alors

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right\| \leq M \frac{(b-a)^n}{n!}.$$

La formule reste vraie si  $b < a$  et  $f : [b, a] \rightarrow E$ .

#### Remarque 2.4.

Si  $E = \mathbb{R}$ , cette version de l'inégalité de Taylor-Lagrange découle directement de la formule de Taylor-Lagrange.

*Démonstration.*

Comme pour la formule de Taylor-Young, on procède par récurrence. Pour  $n = 1$ , il s'agit de l'inégalité des accroissements finis [Ska, Chapitre VII, Théorème 2.7].

Supposons l'inégalité de Taylor-Lagrange valable à un certain rang  $n$ . Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$ , telle que  $f^{(n)}$  soit dérivable sur  $(a, b)$  et  $\|f^{(n+1)}\|$  soit majorée par un réel  $M$ . En appliquant l'hypothèse de récurrence à  $f'$ , on obtient pour tout  $t \in [a, b]$ ,

$$\left\| f'(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!} (t-a)^k \right\| \leq M \frac{|t-a|^n}{n!}.$$

Par l'inégalité des accroissements finis, pour tous  $a \leq s < t \leq b$ ,

$$\left\| [f(t) - f(s)] - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!} [(t-a)^{k+1} - (s-a)^{k+1}] \right\| \leq M \frac{|t-a|^n |t-s|}{n!}.$$

Soit  $N \geq 1$ . On divise l'intervalle  $[a, b]$  en  $N$  segments de même longueur, et on applique l'inégalité précédente sur chacun de ces sous-intervalles  $[s, t]$ . Posons  $t_\ell := a + \ell(b-a)/N$ . Alors :

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!} (b-a)^{k+1} \\ = \sum_{\ell=0}^{N-1} \left[ [f(a_{\ell+1}) - f(a_\ell)] - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!} [(a_{\ell+1}-a)^{k+1} - (a_\ell-a)^{k+1}] \right], \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \left\| f(b) - f(s) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right\| &\leq \sum_{\ell=0}^{N-1} M \frac{|a_{\ell+1}-a|^n |a_{\ell+1}-a_\ell|}{n!} \\ &\leq \int_{a_1}^{a_{N+1}} M \frac{|t-a|^n}{n!} dt \\ &= M \frac{|a_{N+1}-a|^{n+1} - |a_1-a|^{n+1}}{(n+1)!}, \end{aligned}$$

la deuxième inégalité venant d'une majoration d'une somme de Riemann utilisant la croissante de la fonction  $t \mapsto |t-a|$ .

En faisant tendre  $N$  vers  $+\infty$ , on obtient la majoration voulue.  $\square$

### 2.3.2 Applications élémentaires

Montrons que, pour tout  $x \geq 0$ ,

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

La fonction  $f : x \mapsto \ln(1+x)$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+$ . On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange avec  $a = 0$  et  $b = x$ . Pour  $n = 1$ , la dérivée de  $f$  est  $\frac{1}{1+x}$ , majorée par 1 :

$$|\ln(1+x)| \leq x.$$

Pour  $n = 2$ , on a  $f^{(2)}(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$ , qui est aussi majorée par 1 :

$$|\ln(1+x) - x| \leq \frac{x^2}{2},$$

d'où  $\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$ . Pour  $n = 3$ ,

$$\left| \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \right| \leq \frac{x^3}{3},$$

d'où  $\ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ .

Remarquons que, si l'inégalité de Taylor-Lagrange est particulièrement efficace pour obtenir de telles inégalités, des intégrations successives suffisent. Le prix en est de répéter le raisonnement qui a conduit à l'inégalité de Taylor-Lagrange.

### 2.4 Formule de Taylor-Lagrange

Il s'agit d'une version du type "théorème des accroissements finis" de la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral<sup>3</sup>. **Attention** : Comme le théorème des accroissements finis, celle-ci n'est valable que pour des fonctions à valeurs réelles !

**Théorème 7** (Formule de Taylor-Lagrange).

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$ . Alors il existe  $\xi \in (a, b)$  tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + f^{(n)}(\xi) \frac{(b-a)^n}{n!}.$$

#### Remarque 2.5.

Pour  $n = 1$ , ce théorème est exactement la formule des accroissements finis. Tout comme ce dernier, la formule de Taylor-Lagrange ne s'applique qu'aux fonctions à valeurs réelles ; la fonction  $t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$  fournit un contre-exemple en dimension 2.

Cet énoncé se montre lui aussi à partir de la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral, cette fois-ci en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires.

3. À de modestes changements d'hypothèses près, elle n'a pas d'avantage par rapport à la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral.

*Démonstration.*

Posons  $m := \min_{[a,b]} f^{(n)}$  et  $M := \max_{[a,b]} f^{(n)}$ . Alors, d'après la formule de Taylor avec reste intégral,

$$f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k = \int_a^b \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!} (b-t)^{n-1} dt,$$

d'où, en minorant et majorant le membre de droite,

$$m \frac{(b-a)^n}{n!} \leq f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \leq M \frac{(b-a)^n}{n!}.$$

On conclut par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction  $g := \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}$  continue sur  $[a, b]$ .  $\square$

### 2.4.1 Un énoncé plus général

De même que le théorème des accroissements finis, on peut affaiblir l'hypothèse de dérivabilité globalement (il suffit que  $f^{(n-1)}$  soit dérivable) ainsi qu'aux bords de l'intervalle. Le gain de généralité au par l'affaiblissement de la condition au bord peut être occasionnellement utile.

**Théorème 8** (Formule de Taylor-Lagrange, bis).

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^{n-1}$  sur  $[a, b]$  et telle que  $f^{(n-1)}$  soit dérivable sur  $(a, b)$ . Alors il existe  $\xi \in (a, b)$  tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + f^{(n)}(\xi) \frac{(b-a)^n}{n!}.$$

*Démonstration.*

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  un paramètre à déterminer plus tard. Posons, pour tout  $x \in [a, b]$ ,

$$g(x) := \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (b-x)^k + \lambda \frac{(b-x)^n}{n!}.$$

Alors, pour tout  $x \in (a, b)$ ,

$$g'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!} (b-x)^k - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!} (b-x)^{k-1} - \lambda \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{f^{(n)}(x) - \lambda}{(n-1)!} (b-x)^{n-1}.$$

Par le théorème des accroissements finis, il existe  $\xi = \xi(\lambda) \in (a, b)$  tel que  $g(b) - g(a) = g'(\xi)(b-a)$ . En insérant les expressions explicites de  $g$  et  $g'$ ,

$$f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k - \lambda \frac{(b-a)^n}{n!} = \frac{f^{(n)}(\xi) - \lambda}{(n-1)!} (b-\xi)^{n-1} (b-a).$$

Choisissons  $\lambda$  tel que le membre de gauche de l'équation s'annule. Alors le membre de droite s'annule aussi, donc  $f^{(n)}(\xi) = \lambda$ . On substitue  $\lambda$  par  $f^{(n)}(\xi)$  dans le membre de gauche :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + f^{(n)}(\xi) \frac{(b-a)^n}{n!},$$

ce que l'on voulait démontrer.  $\square$

### 3 Applications possibles

Les développements liés aux formules de Taylor que je recommande le plus en première intention sont :

- ▷ L'inégalité de Landau-Kolmogorov (l'inégalité de Kolmogorov générale ou l'inégalité de Kolmogorov  $\mathbb{L}^2$  sont plus subtiles).
- ▷ Un théorème sur des approximations d'intégrales (non traitées dans ce document).
- ▷ Le théorème de division.
- ▷ Le théorème de Bernstein sur les séries entière.

L'analyse des points de rebroussements est une très belle illustration, qu'il peut être utile de mentionner, mais pour laquelle il est plus difficile d'extraire un énoncé mathématique.

La caractérisation des fonctions polynômiales a l'avantage d'un énoncé simple, et l'inconvénient d'une démonstration technique ou utilisant des outils plus avancés.

#### 3.1 Application 1 : Points de rebroussement

Il s'agit d'une application du théorème de Taylor-Young à une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe paramétrée d'image  $\Gamma$ . Soit  $x \in I$  et  $M := \gamma(x)$ . On veut étudier la forme de la courbe  $\Gamma$  au voisinage de  $M$ .

Soit  $p \geq 1$  le plus petit entier tel que  $\gamma^{(p)}(x) \neq 0$  et  $q > p$  le plus petit entier tel que  $f^{(p)}(x)$  et  $f^{(q)}(x)$  sont non liés. Alors  $f^{(p)}(x)$  est le vecteur tangent à  $\Gamma$  en  $M$ . Par le théorème de Taylor-Lagrange,

$$f(x+h) = \frac{f^{(p)}(a)}{p!} h^p + \frac{f^{(q)}(a)}{q!} h^q + o(h^q) = \frac{f^{(p)}(a)}{p!} h^p \left( 1 + \frac{p! f^{(q)}(a)}{q! f^{(p)}(a)} h^{q-p} + o(h^{q-p}) \right).$$

Suivant les signes de  $p$  et  $q$ , on peut déduire la forme de  $\Gamma$  près de  $M$ . En particulier, cette forme est, à changement de repère près, la même que celle de la courbe paramétrée  $t \mapsto (t^p, t^q)$  près de  $0$  :

- ▷ Si  $p$  est impair, on peut reparamétriser la courbe en  $t \mapsto (t, t^{q/p})$ . La courbe est localement le graphe d'une fonction dérivable. Selon la parité de  $q$ , cette courbe reste du même côté de la tangente en  $M$  ou la traverse.
- ▷ Si  $p$  est pair, on peut reparamétriser la courbe en  $t \mapsto (t, t^{q/p})$ , mais seulement si  $t \geq 0$ . Dans ce cas, la courbe a un point de rebroussement. Là encore, suivant la parité de  $q$ , la courbe peut rester du même côté de la tangence ou passer de part et d'autre.

#### Exercice 3.1.

Trouver un exemple et faire un dessin de chacun des quatre cas.

#### Exemple 3.2.

Dans un repère cartésien, la cardioïde a pour équation paramétrique  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ , où  $t \in [0, 2\pi]$  et

$$\begin{cases} x(t) &= \cos(t)(1 + \cos(t)) \\ y(t) &= \sin(t)(1 + \cos(t)) \end{cases}.$$

Les points singulier de la courbe sont les images des paramètres  $t$  tels que  $\gamma'(t) = 0$ . Le seul paramètre pour lequel la dérivée est nulle est  $t = \pi$ , donc le seul point singulier de la cardioïde est  $M = \gamma(\pi) = (0, 0)$ .

En ce point,

$$\begin{cases} x(\pi+h) &= -\frac{h^2}{2} + O(h^4) \\ y(\pi+h) &= -\frac{h^3}{2} + O(h^5) \end{cases}.$$

On a donc  $p = 2$ . De plus,  $\gamma^3(\pi)$  (dirigé par le vecteur  $(0, 1)$ ) n'étant pas colinéaire à  $\gamma^2(\pi)$  (dirigé par le vecteur  $(1, 0)$ ), on a aussi  $q = 3$ . La cardioïde a donc en  $M$  un point de rebroussement, et passe d'un côté à l'autre de sa tangente en  $M$ .

**Remarque 3.3.**

Le cas  $p = 1$  correspond à un point non singulier; dans ce cas, l'analyse précédente permet de déterminer si la courbe reste du même côté de sa tangente ou bien la traverse. Il est traité dans [Moi, Chapitre IV-D].

**3.2 Application 2 : Théorème de Bernstein**

Le théorème de Bernstein applique élégamment la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral aux fonctions développables en série entière.

**Théorème 9** (Théorème de Bernstein [FGN·Ana2, Exercice 3.32] [Gou, Exercice 8 p. 250] [Ska, Exercice 6.9]).

Soient  $I$  un intervalle ouvert et  $f \in C^\infty(I, \mathbb{R})$ . Supposons<sup>a</sup> que  $f^{(n)} \geq 0$  pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ . Alors  $f$  est analytique sur  $I$ .

a. On dit aussi que  $f$  est absolument monotone.

*Démonstration.*

Soit  $a \in I$ . On veut montrer que  $f$  est développable en série entière sur un voisinage de  $a$ . Quitte à remplacer  $f$  par  $x \mapsto f(x - a)$ , on suppose que  $a = 0$ . Soit  $n \geq 0$ . Par la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral, pour tout  $x \in I$ ,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!} (x-t)^{n-1} dt.$$

Fixons  $A > 0$  tel que  $[-A, A] \subset I$ . Alors, pour tout  $x \in [-A, A]$  non nul, en utilisant le changement de variable  $t = xu/A$ ,

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{(n-1)!} x^k \right| &= \left| \int_0^x \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!} (x-t)^{n-1} dt \right| \\ &= \frac{|x|^n}{A^n} \left| \int_0^A \frac{f^{(n)}(xu/A)}{(n-1)!} (A-u)^{n-1} du \right|. \end{aligned}$$

De plus,  $\frac{xu}{A} \leq u$  pour tout  $u \geq 0$ . La fonction  $f^{(n)}$  étant positive et croissante,

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{(n-1)!} x^k \right| \leq \frac{|x|^n}{A^n} \int_0^A \frac{f^{(n)}(u)}{(n-1)!} (A-u)^{n-1} du$$

Cette majoration reste vraie pour  $x = 0$ . De plus, toujours par la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral,

$$\int_0^A \frac{f^{(n)}(u)}{(n-1)!} (A-u)^{n-1} du = f(A) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{(n-1)!} A^k \leq f(A).$$

Par conséquent,

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{(n-1)!} x^k \right| \leq f(A) \frac{|x|^n}{A^n},$$

donc la série de Taylor  $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{(n-1)!} x^k$  converge uniformément vers  $f$  sur tout segment inclus dans  $(-A, A)$ . En particulier, le rayon de convergence de la série de Taylor de  $f$  en 0 est strictement positif, et  $f$  est développable en série entière en 0.  $\square$

Ce théorème admet un raffinement : il suffit de faire l'hypothèse de positivité sur les dérivées paires !

**Théorème 10** (Théorème de Bernstein, bis [Gou, Exercice 8 p. 250]).

Soient  $I$  un intervalle ouvert et  $f \in C^\infty(I, \mathbb{R})$ . Supposons que  $f^{(2n)} \geq 0$  pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ . Alors  $f$  est analytique sur  $I$ .

*Démonstration.*

Une fois encore, on fixe  $a \in I$ , et on suppose sans perte de généralité que  $a = 0$ . Posons  $F(x) := f(x) + f(-x)$ , qui est bien définie sur un voisinage de 0. Alors la série de Taylor de  $F$  en 0 a un rayon de convergence strictement positif.

Soit  $n \geq 0$ . Alors  $0 \leq f^{(2n)}(t) \leq f^{(2n)}(t) + f^{(2n)}(-t) = F^{(2n)}(t)$  pour tout  $t$ , et, en utilisant cette majoration dans la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral et le théorème précédent, la série  $\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{(n-1)!} x^k$  converge vers  $f$  sur ce voisinage de 0.

Enfin, toujours par cette majoration,  $\frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!} |x|^{2n} \leq \frac{F^{(2n)}(0)}{(2n)!} |x|^{2n}$ , qui converge vers 0 car la série de Taylor de  $F$  converge. Par conséquent, la série  $\sum_{k=0}^{2n} \frac{f^{(k)}(0)}{(n-1)!} x^k$  converge aussi vers  $f$  sur ce voisinage de 0.  $\square$

**Remarque 3.4.**

Le théorème de Bernstein fournit un peu plus : l'intervalle de convergence de la série entière en  $a \in I$  est supérieur ou égal à la distance entre  $a$  et les extrémités de  $I$ .

**Exemple 3.5.**

La fonction exponentielle est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , et toutes ses dérivées sont positives. Elle est donc développable en série entière, et le rayon de convergence de cette série est infini.

**Exemple 3.6.**

La fonction tangente est de classe  $C^\infty$  sur  $[0, \pi/2)$ . De plus,  $\tan$  est positive,  $\tan' = 1 + \tan^2$  est positive, et par la formule de Leibniz, on montre par récurrence que toutes les dérivées de  $\tan$  sont positives sur  $[0, \pi/2)$ . Par conséquent, la fonction tangente est développable en série entière sur  $(0, \pi/2)$ . Le rayon de convergence de sa série de Taylor en  $x$  est d'au moins  $\min\{|x|, |\pi/2 - x|\}$ .

Une analyse plus fine de la fonction tangente, toujours en utilisant la formule de Leibniz et une récurrence, détermine que  $\tan^{(2k)}$  est négative sur  $(-\pi/2, 0]$  et positive sur  $[0, \pi/2)$ , tandis que  $\tan^{(2k+1)}$  est toujours positive. La deuxième version du théorème de Bernstein montre alors que  $\tan'$  est développable en série entière sur  $(-\pi/2, \pi/2)$ , et par intégration que  $\tan$  aussi. En particulier, le rayon de convergence de la série de Taylor de  $\tan$  en  $x$  est d'au moins  $\min\{|\pi/2 + x|, |\pi/2 - x|\}$ , qui est le mieux que l'on puisse espérer.

**Exemple 3.7.**

La fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est  $C^\infty$  et a toutes ses dérivées paires positives sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Elle est donc développable en série entière sur  $\mathbb{R}_+^*$ , et le rayon de convergence de cette série en un point  $x > 0$  est d'au moins  $x$ , qui est le mieux que l'on puisse espérer.

### 3.3 Application 3 : Théorème de division

La règle de l'Hospital donne une condition suffisante pour assurer qu'une fonction  $\frac{f}{g}$  se prolonge par continuité en un point où  $f$  et  $g$  s'annulent : si  $f$  et  $g$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$ , si  $f(x_0) = g(x_0) = 0$  et  $g'(x_0) \neq 0$ , alors ce quotient se prolonge en une fonction continue en  $x_0$ .

Le théorème de division généralise ce résultat, à la fois en termes de degré d'annulation  $p$  de  $g$  et de degré de régularité  $n$  des fonctions  $f$  et  $g$ .

Une version pour  $p = 1$  se trouve dans [FGN·Ana1, Exercice 4.37]. Nous en fournissons une version plus générale ( $p$  quelconque), dont la démonstration évite de plus la formule de Leibniz.

#### **Théorème 11** (Théorème de division).

Soient  $I$  un intervalle ouvert,  $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$  et  $a \in I$ . Supposons qu'il existe  $0 \leq p \leq n$  tel que  $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(p-1)}(a) = 0$ . Alors il existe  $g \in \mathcal{C}^{n-p}(I, \mathbb{R})$  telle que  $f(x) = (x-a)^p g(x)$  pour tout  $x \in I$ .

*Démonstration.*

Quitte à translater  $f$ , on suppose que  $a = 0$ . Nous allons démontrer le résultat par récurrence sur la régularité de la fonction  $g$ , avec une hypothèse de récurrence maximaliste. Posons, pour tout  $k \geq 0$ , l'hypothèse  $\mathcal{P}(k)$  :

Pour tout entier  $p \in \mathbb{N}$ , toute fonction  $f \in \mathcal{C}^{p+k}(I, \mathbb{R})$  telle que  $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(p-1)}(0) = 0$ , la fonction  $g$  définie par  $g(x) = \frac{f(x)}{x^p}$  pour  $x \in I \setminus \{0\}$  et  $g(0) = \frac{f^{(p)}(0)}{p!}$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$ .

Montrons l'initialisation. La formule de Taylor-Young à l'ordre  $p$  pour  $f$  donne

$$f(x) = \frac{f^{(p)}(0)}{p!} x^p + o(x^p),$$

donc  $\lim_0 g = \frac{f^{(p)}(0)}{p!} = g(0)$ . La fonction  $g$  est bien de classe  $\mathcal{C}^0$ .

Supposons l'hypothèse de récurrence vraie à l'ordre  $k$ . Soit  $p \in \mathbb{N}$  et  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^{p+k+1}$  sur  $I$  vérifiant les hypothèses de l'énoncé. Alors, pour tout  $x \neq 0$ ,

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{x^p} - p \frac{f(x)}{x^{p+1}} = \frac{f'(x) - \frac{f^{(p)}(0)}{(p-1)!} x^{p-1}}{x^p} - \frac{p f(x) - \frac{f^{(p)}(0)}{(p-1)!} x^p}{x^{p+1}}.$$

Or  $x \mapsto f'(x) - \frac{f^{(p)}(0)}{(p-1)!} x^{p-1}$  est de classe  $\mathcal{C}^{p+k}$  sur  $I$  et ses dérivées d'ordre 0 à  $p-1$  en 0 sont toutes nulles. Par l'hypothèse de récurrence (appliquée à l'entier  $p$ ), cette fonction se prolonge en une fonction de classe  $\mathcal{C}^k$  en 0.

De même,  $x \mapsto p f(x) - \frac{f^{(p)}(0)}{(p-1)!} x^p$  est de classe  $\mathcal{C}^{p+k+1}$  sur  $I$  et ses dérivées d'ordre 0 à  $p$  en 0 sont toutes nulles. Par l'hypothèse de récurrence (appliquée à l'entier  $p+1$ ), cette fonction se prolonge en une fonction de classe  $\mathcal{C}^k$  en 0.

Par conséquent, la fonction  $g'$  se prolonge par continuité en 0 en une fonction  $\tilde{g}'$  de classe  $\mathcal{C}^k$ . Or  $\tilde{g}'(x) = g'(x)$  pour  $x \neq 0$ , et par le théorème de limite des dérivées,  $g$  est dérivable en 0 et  $g'(0) = \lim_0 g' = \tilde{g}'(0)$ . Par conséquent,  $g'$  elle-même est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$ , donc  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^{k+1}$  sur  $I$ , ce qu'il fallait démontrer.  $\square$

#### **Exercice 3.8.**

Calculer les dérivées de la fonction  $g$  en 0.

Plus généralement,

**Théorème 12** (Théorème de division, bis).

Soient  $I$  un intervalle ouvert,  $f, g \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$  et  $a \in I$ . Supposons qu'il existe  $0 \leq p \leq n$  tel que  $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(p-1)}(a) = 0$  et que  $g^{(p)}(a) \neq 0$ . Alors il existe un voisinage  $V$  de  $a$  sur lequel la fonction  $\frac{f}{g}$  est prolongeable par continuité, et ce prolongement est de classe  $\mathcal{C}^{n-p}$ .

*Démonstration.*

Sans perte de généralité,  $p$  est le plus petit entier  $k$  tel que  $g^{(k)}(a) \neq 0$ . Sinon, on remplace  $p$  par ce plus petit entier  $k$ , et on montre que  $f/g$  est prolongeable en une fonction de classe  $\mathcal{C}^{n-k}$ , donc de classe  $\mathcal{C}^{n-p}$ .

Comme  $g^{(p)}(a) \neq 0$ , il existe un voisinage  $V$  de  $a$  sur lequel  $g$  ne s'annule qu'en  $a$ . Choisissons ce voisinage. Alors  $f/g$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $V \setminus \{a\}$ .

De plus,  $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{(x-a)^p} \frac{(x-a)^p}{g(x)}$  pour  $x \in V \setminus \{a\}$ . Les deux fonctions  $x \mapsto \frac{f(x)}{(x-a)^p}$  et  $x \mapsto \frac{g(x)}{(x-a)^p}$  se prolongent en des fonctions de classe  $\mathcal{C}^{n-p}$  sur  $V$ , et la seconde des deux ne s'annule pas en  $a$ . Leur quotient est donc bien de classe  $\mathcal{C}^{n-p}$  sur  $V$ .  $\square$

**Remarque 3.9.**

En particulier, si  $f, g$  sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et vérifient l'hypothèse souhaitée sur les dérivées à un certain ordre  $p \in \mathbb{N}$ , alors  $f/g$  se prolonge par continuité en une application de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

**Remarque 3.10.**

La démonstration adoptée utilise la formule de Taylor-Young. Il est aussi possible d'utiliser très efficacement la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral ainsi qu'un théorème de dérivation sous le signe intégral, pour une démonstration nettement plus rapide. Cette seconde voie est présentée dans [FGN·Ana1, Exercice 4.37].

**Exercice 3.11.**

La méthode de dérivation sous le signe intégral présentée dans [FGN·Ana1, Exercice 4.37] n'est utilisée que dans le cas  $p = 1$ . La généraliser à tout entier  $p$ .

### 3.4 Application 4 : Intégration numérique : méthodes des rectangles, des trapèzes...

Ce développement admet de nombreuses variantes, visant à déterminer l'erreur dans différentes méthodes d'intégration numérique : méthode des trapèzes, méthodes de Simpson, méthode de Newton...

Il peut se faire avec la formule de Taylor-Lagrange, l'inégalité de Taylor-Lagrange ou la formule de Taylor avec reste intégral.

Ce développement sera traité plus en détail dans le chapitre d'intégration. Donnons cependant quelques références :

- ▷ [FGN·Ana2, Exercice 1.22]
- ▷ [Moi, Partie III.E] et [Moi, Partie II.E, Exercice 6]
- ▷ [Gou, Exercice 5 p. 79]

### 3.5 Application 5 : Caractérisation des fonctions polynômiales

Soit  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Alors  $f$  est polynômiale si et seulement si

$$\exists n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = 0.$$

De façon amusante, on peut intervertir les quantificateurs ! Ce qui suit utilise la formule de Taylor.

**Théorème 13** ([Moi, Exercice 3 p. 131]).

Soit  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Alors  $f$  est polynômiale si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)}(x) = 0.$$

Tout d'abord, introduisons quelques lemmes utiles.

**Lemme 3.12.**

Soit  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

- ▷ Si  $f$  est polynômiale sur un intervalle  $I$ , alors  $f$  est polynômiale sur  $\bar{I}$ .
- ▷ Si  $f$  est polynômiale sur deux intervalles  $I_1, I_2$  et  $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$ , alors  $f$  est polynômiale sur  $I_1 \cup I_2$ .
- ▷ Soit  $(I_i)_{i \in \mathcal{I}}$  une famille d'intervalles d'intersection non vide. Si  $f$  est polynômiale sur chaque intervalle  $I_i$ , alors  $f$  est polynômiale sur  $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} I_i$ .

*Démonstration.*

Soit  $I$  un intervalle sur lequel  $f$  est polynômiale et  $\alpha \in I$ . Soit  $N$  son degré. Alors  $f$  coïncide sur  $I$  avec sa série de Taylor en  $\alpha$  :

$$f(x) = \sum_{k=0}^N \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!} (x - \alpha)^k. \quad (1)$$

Par continuité, cette formule reste valable sur  $\bar{I}$ , donc  $f$  est polynômiale sur  $\bar{I}$ .

Supposons que  $f$  est polynômiale sur deux intervalles  $I_1, I_2$  tels que  $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$ . Choisissons  $\alpha \in I_1 \cap I_2$ . Alors la formule (1) est valide à la fois sur  $I_1$  et  $I_2$ , donc sur  $I_1 \cup I_2$ . Donc  $f$  est polynômiale sur  $I_1 \cup I_2$ .

Soit  $(I_i)_{i \in \mathcal{I}}$  une telle famille d'intervalles. Supposons que  $f$  est polynômiale sur chaque intervalle  $I_k$ . Choisissons  $\alpha \in \bigcap_{i \in \mathcal{I}} I_i$ . Par ce qui précède, la formule (1) est valide sur chaque  $I_i$ , donc sur  $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} I_i$ , donc  $f$  est polynômiale sur  $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} I_i$ .  $\square$

**Lemme 3.13.**

Soient  $I$  un intervalle et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Posons  $J := \{x \in I : f(x) \neq 0\}$ . Si  $f$  est polynômiale sur chaque segment  $K \subset J$ , alors  $f$  est polynômiale sur  $I$ .

*Démonstration.*

Si  $J$  est vide, alors  $f$  est identiquement nulle, donc polynômiale sur  $I$ . Supposons donc  $J$  non vide, et fixons  $\alpha \in J$ .

Soit  $\mathcal{E} := \{U \subset I \text{ intervalle}, \alpha \in U, f|_U \text{ polynômiale}\}$ . Alors, par le troisième item du Lemme 3.12,  $f$  est polynômiale sur  $V := \bigcup_{U \in \mathcal{E}} U$ . Il y a donc bien un intervalle maximal sur lequel  $f$  est polynômiale.

Si  $V = I$ , nous avons terminé la démonstration. Procédons par l'absurde et supposons que  $V \neq I$ . Remarquons alors que  $f$  est aussi polynômiale sur  $\bar{V}$  par le premier item du Lemme 3.12; par maximalité,  $V = \bar{V}$  est fermé. Il y a de plus une des deux extrémités  $\beta$  de  $V$  qui n'est pas une extrémité de  $I$ . Quitte à remplacer  $f$  par  $-f$ , supposons pour simplifier que  $\beta = \max V$ .

$f$  est un polynôme non nul sur  $V$ , donc sa série de Taylor en  $\beta$  a un terme de coefficient non nul de degré minimal  $p$ , de telle sorte que  $f(\beta+h) = \sum_{k=p}^N \frac{f^{(k)}(\beta)}{k!} h^k + o(h^n)$ . En particulier,  $f(x+h) = \Theta(h^p)$  au voisinage de  $\beta$ . Si  $p = 0$ , alors  $f(\beta) \neq 0$ ; sinon,  $\beta$  est un zéro isolé de  $f$ .

Dans les deux cas, il existe  $\gamma > \beta$  tel que  $f$  ne s'annule pas sur  $(\beta, \gamma)$ . Mais alors  $f$  est polynômiale sur tout segment de  $(\beta, \gamma)$ . Par le troisième item du Lemme 3.12,  $f$  est polynômiale sur  $(\beta, \gamma)$ . Par

le premier item du Lemme 3.12,  $f$  est polynômiale sur  $^4 [\beta, \gamma]$ . Par le deuxième item du Lemme 3.12, avec  $I_1 = V$ ,  $I_2 = [\beta, \gamma]$  et  $\beta \in I_1 \cap I_2$ , la fonction  $f$  est polynômiale sur  $V \cup [\beta, \gamma]$ .

Ceci contredit la maximalité de  $\beta$ . L'hypothèse que nous avons faite est fausse :  $f$  est bien polynômiale sur  $I$ .  $\square$

*Démonstration du théorème.*

Soit  $f$  une fonction satisfaisant les conditions sur théorème. Si  $f$  est polynômiale sur chaque intervalle  $[n, n + 1]$ , alors par recollements successifs,  $f$  coïncide avec sa série de Taylor en 0, donc  $f$  est polynômiale sur  $\mathbb{R}$ . Il existe donc un segment  $I$  sur lequel  $f$  n'est pas polynômiale. Par la contraposée du Lemme 3.13, on peut trouver un segment  $I_0 \subset I$  sur lequel  $f$  n'est pas polynômiale et ne s'annule pas.

On définit par récurrence une suite emboîtée de segments  $I_n$  de la façon suivante. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . La fonction  $f^{(n)}$  n'est pas polynômiale sur  $I_n$ , donc  $f^{(n+1)}$  n'est pas polynômiale sur  $I_n$ , donc il existe un segment  $I_{n+1} \subset I_n$  sur lequel  $f^{(n+1)}$  n'est pas polynômiale et ne s'annule pas.

Soit  $K := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ . Alors  $K$  est une intersection décroissante de compacts, donc est un compact non vide. De plus, aucune dérivée de  $f$  ne s'annule sur  $K$ . Autrement dit, si  $f$  n'est pas polynômiale sur  $\mathbb{R}$ , alors on peut trouver un point en lequel aucune des dérivées de  $f$  ne s'annule.  $\square$

### 3.6 Application 6 : Inégalités de Landau–Kolmogorov et de Kolmogorov

#### 3.6.1 Inégalités de Landau–Kolmogorov

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$ . Les inégalités de Kolmogorov permettent de contrôler les dérivées  $f', \dots, f^{(n-1)}$  à l'aide uniquement de  $f$  et de  $f^{(n)}$  ; les inégalités de Landau–Kolmogorov correspondent au cas particulier des fonctions  $\mathcal{C}^2$ . Ces dernières fournissent déjà un développement très riche !

Rappelons que, pour toute fonction  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , on note  $\|f\|_\infty = \sup_A |f|$ .

**Théorème 14** (Inégalités de Landau – Kolmogorov [FGN·Ana1, Exercice 4.36] [Gou, Exercice 8 p. 83] [Moi, Exercice B.5 p. 139] [Ska, Exercice 7.33]).

Soit  $a \in \mathbb{R}$  et  $f \in \mathcal{C}^2([a, +\infty), \mathbb{R})$  une fonction bornée. Alors

$$\|f'\|_\infty \leq 2\sqrt{\|f\|_\infty \|f^{(2)}\|_\infty}.$$

Soit  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  une fonction bornée. Alors

$$\|f'\|_\infty \leq \sqrt{2}\sqrt{\|f\|_\infty \|f^{(2)}\|_\infty}.$$

*Démonstration.*

Commençons par l'inégalité sur une demi droite  $[a, +\infty)$ . Soit  $f \in \mathcal{C}^2([a, +\infty), \mathbb{R})$  bornée et  $x \in$

4. Ou éventuellement sur  $[\beta, \gamma]$  si  $\gamma$  est l'extrémité supérieure de  $I$  et n'appartient pas à  $I$ .

$[a, +\infty)$ . Soit  $h > 0$ . Alors, par la formule de Taylor avec reste intégral :

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + f'(x)h + \int_0^h f^{(2)}(x+t)(h-t) dt \\ f'(x)h &= f(x+h) - f(x) - \int_0^h f^{(2)}(x+t)(h-t) dt \\ |f'(x)h| &\leq |f(x+h)| + |f(x)| + \left| \int_0^h f^{(2)}(x+t)(h-t) dt \right| \\ |f'(x)| &\leq \frac{2}{h} \|f\|_\infty + \frac{h}{2} \|f^{(2)}\|_\infty. \end{aligned}$$

Si  $\|f^{(2)}\|_\infty = 0$ , alors, en prenant la limite  $h \rightarrow +\infty$ , on trouve  $f'(x) = 0$ , donc  $\|f'\|_\infty = 0$ , et l'inégalité de Landau-Kolmogorov est vérifiée. De même, si  $\|f\|_\infty = 0$ , l'inégalité de Landau-Kolmogorov est vérifiée.

Sinon, on optimise le paramètre  $h$ . Le membre de droite atteint son minimum pour  $h = 2 \frac{\|f\|_\infty}{\|f^{(2)}\|_\infty}$ , ce qui donne :

$$|f'(x)| \leq 2\sqrt{\|f\|_\infty \|f^{(2)}\|_\infty}.$$

Ceci étant valide pour tout  $x \in [a, +\infty)$ , on obtient l'inégalité annoncée.

Passons à l'inégalité sur  $\mathbb{R}$ . L'astuce pour améliorer la constante consiste à prendre deux points de part et d'autre du point de base. Soit  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  bornée et  $x \in \mathbb{R}$ . Soit  $h > 0$ . Alors, par la formule de Taylor avec reste intégral :

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + f'(x)h + \int_0^h f^{(2)}(x+t)(h-t) dt \\ f(x-h) &= f(x) - f'(x)h + \int_0^h f^{(2)}(x+t)(h-t) dt \end{aligned}$$

En retranchant ces deux égalités, on obtient

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x-h) &= 2f'(x)h + \int_{-h}^h f^{(2)}(x+t)(h-t) dt \\ 2f'(x)h &= f(x+h) - f(x-h) - \int_{-h}^h f^{(2)}(x+t)(h-t) dt \\ |f'(x)| &\leq \frac{1}{h} \|f\|_\infty + \frac{h}{2} \|f^{(2)}\|_\infty. \end{aligned}$$

L'inégalité est un peu plus fine que dans le cas d'une demi-droite. Là encore, les cas  $\|f^{(2)}\|_\infty$  et  $\|f\|_\infty = 0$  sont à considérer à part. Dans les autres, on optimise le paramètre  $h$ . Le membre de droite atteint son minimum pour  $h = \sqrt{2} \frac{\|f\|_\infty}{\|f^{(2)}\|_\infty}$ , ce qui donne :

$$|f'(x)| \leq \sqrt{2} \sqrt{\|f\|_\infty \|f^{(2)}\|_\infty}.$$

Ceci étant valide pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on obtient l'inégalité annoncée. □

### 3.6.2 Inégalité de Kolmogorov $\mathbb{L}^2$

Ces inégalités sont très robustes. Elles sont valables pour la norme  $\|\cdot\|_\infty$ , mais aussi dans d'autres normes! Cela peut mener à d'autres développements intéressants, bien que n'utilisant pas les formules de Taylor.

Nous renvoyons notamment à [FGN·Ana3, Exercices 4.6, 4.7, 4.20] pour ce qui suit.

**Théorème 15** (Inégalité de Kolmogorov  $\mathbb{L}^2$ ).

Soit  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Supposons que  $f$  et  $f^{(2)} \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Alors

$$\|f'\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \leq \sqrt{\|f\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \|f^{(2)}\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})}}.$$

Le cœur de la démonstration est assez bref (une intégration par partie et une application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz), mais demande des résultats intermédiaires pour contrôler certains termes apparaissant lors de l'intégration par partie. Commençons par démontrer deux lemmes intermédiaires. Cela en fait un développement possible si ces résultats intermédiaires sont admis, ou si l'hypothèse  $\lim_{\pm\infty} f = \lim_{\pm\infty} f'$  est ajoutée au théorème précédent.

**Lemme 3.14.**

Soit  $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Si  $g' \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , alors  $g$  est  $1/2$ -höldérienne.

*Démonstration.*

Pour tous  $x \leq y$ , par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| &\leq \int_x^y |g'(t)| \, dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} |g'(t)| \mathbf{1}_{[x,y]}(t) \, dt \\ &\leq \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |g'(t)|^2 \, dt} \sqrt{\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[x,y]}(t)^2 \, dt} \\ &= \|g'\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \sqrt{y - x}. \end{aligned} \quad \square$$

**Lemme 3.15.**

Soit  $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et  $p \in [1, +\infty)$ . Si  $g \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et  $g'$  est uniformément continue, alors  $\lim_{\pm\infty} g' = 0$  et  $\lim_{\pm\infty} g = 0$ .

*Démonstration.*

Soit  $\varepsilon > 0$ . La fonction  $g'$  étant uniformément continue, il existe  $\delta > 0$  tel que  $|g'(x) - g'(y)| \leq \varepsilon/2$  dès que  $|x - y| \leq \delta$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $g'(x) \geq \varepsilon$ . Alors  $g'(t) \geq \varepsilon/2$  pour tout  $t \in [x - \delta, x + \delta]$ . Mais alors, pour tout  $t \in [x - \delta, x + \delta]$ ,

$$\begin{aligned} g(t + s) &\geq g(t) + \frac{\varepsilon}{2}s \quad \forall s \in [0, x + \delta - t], \\ g(t + s) &\leq g(t) + \frac{\varepsilon}{2}s \quad \forall s \in [x - \delta - t, 0]. \end{aligned}$$

Si  $g$  est positive sur  $[x - \delta, x + \delta]$ , on choisit  $t = x - \delta$  pour obtenir  $g(x - \delta) \geq g(x - \delta) + \frac{\varepsilon}{2}s \geq \frac{\varepsilon}{2}s$  pour tout  $s \in [0, 2\delta]$ . Si  $g$  est négative sur  $[x - \delta, x + \delta]$ , on choisit  $t = x + \delta$  pour obtenir une inégalité similaire. Si  $g$  s'annule sur  $[x - \delta, x + \delta]$ , on choisit  $t$  un point d'annulation de  $g$ .

Dans tous les cas, il existe  $t \in [x - \delta, x + \delta]$  et signe  $\pm$  tels que  $t \pm [0, \delta] \subset [x - \delta, x + \delta]$  et  $|g(t \pm s)| \geq \frac{\varepsilon}{2}s$  pour tout  $s \in [0, \delta]$ .

Soit  $p \in [1, +\infty)$ . Alors

$$\int_{x-\delta}^{x+\delta} |g(t)|^p dt \geq \int_0^\delta \left(\frac{\varepsilon}{2}t\right)^p dt = \frac{\varepsilon^p \delta^{p+1}}{2^p(p+1)}.$$

Or  $\int_{\mathbb{R}} |g(t)|^p dt < +\infty$ , donc on ne peut pas trouver une suite infinie de points  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tels que  $|x_n - x_m| \geq 2\delta$  pour tous  $n \neq m$  et  $g'(x_n) \geq \varepsilon$  pour tout  $n$ . Donc  $\{x \in \mathbb{R} : g'(x) \geq \varepsilon\}$  est borné. De même,  $\{x \in \mathbb{R} : g'(x) \leq -\varepsilon\}$  est borné. Autrement dit, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $M \geq 0$  tel que  $|g'(x)| \leq \varepsilon$  dès que  $|x| \geq M$ . Donc  $\lim_{\pm\infty} g' = 0$ . Cela démontre le premier point.

En particulier,  $g'$  est continue et converge en  $\pm\infty$ , donc  $g'$  est bornée. Par le théorème des accroissements finis,  $g$  est lipschitzienne, donc uniformément continue. On va utiliser un argument similaire au précédent, mais simplifié. Soit  $\varepsilon > 0$ . La fonction  $g$  étant uniformément continue, il existe  $\delta > 0$  tel que  $|g(x) - g(y)| \leq \varepsilon/2$  dès que  $|x - y| \leq \delta$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $g'(x) \geq \varepsilon$ . Alors  $g'(t) \geq \varepsilon/2$  pour tout  $t \in [x - \delta, x + \delta]$ . Mais alors

$$\int_{x-\delta}^{x+\delta} |g(t)|^p dt \geq \frac{\varepsilon^p}{2^{p-1}} \delta.$$

De même si  $g'(x) \leq -\varepsilon$ . Par le même type d'argument que précédemment,  $\lim_{\pm\infty} g = 0$ .  $\square$

### Exercice 3.16.

Reprenez la démonstration précédente en faisant des dessins !

Démonstration du théorème de Kolmogorov  $\mathbb{L}^2$ .

Soit  $f$  une telle fonction. Pour tous  $a < b$ , par intégration par parties,

$$\int_a^b f'(t)^2 dt = [f(t)f'(t)]_a^b - \int_a^b f(t)f^{(2)}(t) dt.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à  $f$  et  $f^{(2)}$ ,

$$\left| \int_a^b f(t)f^{(2)}(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt \int_a^b f^{(2)}(t)^2 dt} \leq \|f\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \|f^{(2)}\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})}.$$

De plus, comme  $f^{(2)}$  est de carré intégrable, par le Lemme 3.14 appliqué à  $g = f'$ , la fonction  $f'$  est 1/2-höldérienne, donc uniformément continue. par le Lemme 3.15 appliqué à  $g = f$  et  $p = 2$ , on a  $\lim_{\pm\infty} f = \lim_{\pm\infty} f' = 0$ .

Par conséquent, la fonction  $b \mapsto \int_a^b f'(t)^2 dt$  est croissante et majorée, donc convergente. On peut donc passer à la limite :

$$\int_a^{+\infty} f'(t)^2 dt = -f(a)f'(a) - \int_a^{+\infty} f(t)f^{(2)}(t) dt,$$

l'intégrale du membre de droite étant nécessairement convergente en  $b$  comme somme de fonctions convergentes. On fait de même tendre  $a$  vers  $-\infty$  :

$$\int_{\mathbb{R}} f'(t)^2 dt = - \int_{\mathbb{R}} f(t)f^{(2)}(t) dt.$$

Finalement, la majoration du membre de droite grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz permet de conclure :

$$\|f'\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})}^2 \leq \|f\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \|f^{(2)}\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})}. \quad \square$$

### 3.6.3 Saturation des inégalités de Landau–Kolmogorov

L'inégalité de Landau–Kolmogorov sur  $[0, +\infty)$  implique que, pour toute fonction  $f$  bornée et de classe  $\mathcal{C}^2$ ,

$$\|f'\|_\infty \leq 2\sqrt{\|f\|_\infty \|f^{(2)}\|_\infty}.$$

Cette inégalité est-elle optimale? Essayons de construire une fonction non constante, bornée, de classe  $\mathcal{C}^2$  et réalisant l'égalité. Pour cela, toutes les inégalités dans la démonstration de l'inégalité de Landau–Kolmogorov doivent être des égalités. Faisons cette hypothèse.

Quitte à remplacer  $f$  par  $t \mapsto \lambda f(\mu t)$  avec  $\lambda$  et  $\mu$  bien choisis, on peut supposer que  $\|f\|_\infty = \|f^{(2)}\|_\infty = 1$ , et donc que  $\|f'\|_\infty = 2$ . Le paramètre  $h$  dans la démonstration de l'inégalité de Landau–Kolmogorov est alors fixé à 2.

Premièrement, montrons qu'il existe un point  $x$  tel que  $|f'(x)| = 2$ . En revisitant la démonstration de l'inégalité de Landau–Kolmogorov dans le cas réel, on a plus précisément  $|f'(x)| \leq \sqrt{2}$  pour tout  $x \geq \sqrt{2}$ . En particulier,  $\sup_{\mathbb{R}} |f'| = \sup_{[0, \sqrt{2}]} |f'| = 2$ . Or une fonction continue atteint son maximum, donc il existe bien un  $x \in [0, \sqrt{2}]$  tel que  $|f'(x)| = 2$ . Quitte à remplacer  $f$  par  $-f$ , on peut même supposer que  $f'(x) = 2$ . Alors

- ▷  $f(x+h) = -f(x) = \|f\|_\infty = 1$ .
- ▷  $\int_0^2 f^{(2)}(x+t)(2-t) dt = -\|f^{(2)}\|_\infty \int_0^2 f^{(2)}(t)(2-t) dt$ , et en particulier  $f^{(2)}(t)$  est constante égale à  $-\|f^{(2)}\|_\infty = -1$  sur l'intervalle  $[x, x+2]$

Par le dernier point, il existe  $A$  et  $B$  tels que  $f(x+t) = A + Bt - \frac{t^2}{2}$  sur l'intervalle  $[0, 2]$ . Or  $f'(x) = 2$ , donc  $B = 2$ . Enfin,  $f(x) = -1$ , donc  $A = -1$ . On a donc

$$f(x+t) = -1 + 2t - \frac{t^2}{2} \quad \forall t \in [0, 2].$$

Or  $f(x) = -1$  et  $f'(x) = 2$ . Si  $x > 0$ , alors on peut trouver des points  $y < x$  tels que  $f(y) < -1$ , ce qui contredit l'hypothèse que  $\|f\|_\infty = 1$ . Donc  $x = 0$  et

$$f(t) = -1 + 2t - \frac{t^2}{2} \quad \forall t \in [0, 2].$$

Enfin,  $f(2) = 1$ , ainsi que  $f'(2) = 0$  et  $f''(2) = -1$ . On peut prolonger  $f$  en une fonction  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  qui satisfait toujours les contraintes  $\|f\|_\infty = 1$ ,  $\|f'\|_\infty = 2$ ,  $\|f^{(2)}\|_\infty = 1$ .

Plus généralement, une fonction qui réalise l'inégalité de Landau–Kolmogorov sur  $[a, +\infty)$  existera toujours, et commencera par un arc de parabole.

Sur  $\mathbb{R}$ , la situation est un peu plus compliquée. Soit  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  telle que  $\|f\|_\infty = 1$ ,  $\|f'\|_\infty = \sqrt{2}$ ,  $\|f^{(2)}\|_\infty = 1$ . On montre alors que, s'il existe un point  $x$  tel que  $f'(x) = \sqrt{2}$ , alors quitte à translater  $f$ ,

$$\begin{aligned} f(x+t) &= \sqrt{2}t - \frac{t^2}{2} \quad \forall t \in [0, \sqrt{2}], \\ f(x-t) &= \sqrt{2}t + \frac{t^2}{2} \quad \forall t \in [\sqrt{2}, 0]. \end{aligned}$$

Mais alors  $f^{(2)}$  n'est pas continue en 0. On peut cependant atteindre l'égalité, mais :

- ▷ On modifie localement  $f$  pour approcher la fonction ci-dessus tout en restant continue (par exemple en remplaçant  $f$  par  $t \mapsto Mt$  sur un petit voisinage de 0, où  $M$  est grand) ;
- ▷ La fonction ainsi modifiée est de classe  $\mathcal{C}^2$ , mais ne réalise pas l'égalité.
- ▷ On concatène de telles fonctions, avec des valeurs de  $M$  de plus en plus grandes, de telle sorte que des valeurs de  $f'$  s'approchent de mieux en mieux de  $\sqrt{2}$  (sans jamais l'atteindre).

### 3.6.4 Inégalités de Kolmogorov

Comme annoncé, l'inégalité de Landau–Kolmogorov se généralise pour contrôler les dérivées  $f', \dots, f^{(n-1)}$  à l'aide uniquement de  $f$  et de  $f^{(n)}$ .

**Théorème 16** (Inégalités de Kolmogorov [FGN·Ana1, Exercice 4.36] [Gou, Exercice 8 p. 83] [Moi, Exercice B.6 p. 139] [Ska, Exercice 7.33]).

Soient  $0 \leq k \leq n$ . Pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  bornée,

$$\|f^{(k)}\|_{\infty} \leq 2^{\frac{k(n-k)}{2}} \|f\|_{\infty}^{1-\frac{k}{n}} \|f^{(n)}\|_{\infty}^{\frac{k}{n}}.$$

*Démonstration.*

Soit  $f$  une telle fonction. Alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout  $h \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x+h) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(x)}{i!} h^i + \int_0^h \frac{f^{(n)}(x+t)}{(n-1)!} (h-t)^{n-1} dt$$

$$\left| \sum_{i=1}^{n-1} \frac{h^i}{i!} f^{(i)}(x) \right| \leq 2 \|f\|_{\infty} + \frac{\|f^{(n)}\|_{\infty}}{n!} h^n.$$

Le membre de gauche de l'équation est, à la valeur absolue près, une fonction linéaire des dérivées. On va essayer de l'inverser afin de récupérer les valeurs des dérivées. Pour cela, une seule valeur de  $h$  ne suffit pas ; on va utiliser cette inégalité avec  $0 < h_1 < \dots < h_{n-1}$  bien choisis.

Soit  $X$  le vecteurs de coordonnées  $X_i = f^{(i)}(x)$ . Soit  $A$  la matrice de coefficients  $A_{ij} = \frac{h_i^j}{j!}$ . Alors, pour tout  $1 \leq i \leq n-1$ ,

$$|(AX)_i| \leq 2 \|f\|_{\infty} + \frac{\|f^{(n)}\|_{\infty}}{n!} h_i^n.$$

La matrice  $A$  est inversible : quitte à multiplier ses colonnes par  $j!$ , il s'agit d'une matrice de Vandermonde. Par conséquent,

$$\|X\|_{\infty} \leq \|A^{-1}\| \max_{1 \leq i \leq n-1} \left| 2 \|f\|_{\infty} + \frac{\|f^{(n)}\|_{\infty}}{n!} h_i^n \right| = \|A^{-1}\| \left| 2 \|f\|_{\infty} + \frac{\|f^{(n)}\|_{\infty}}{n!} h_{n-1}^n \right|.$$

où la norme  $\|A^{-1}\|$  est la norme d'opérateur sur  $(\mathbb{R}^{n-1}, \|\cdot\|_{\infty})$ . En particulier, cette borne étant indépendante de  $x$ , les fonctions  $f', \dots, f^{(n-1)}$  sont bornées.

On démontre ensuite le résultat par récurrence sur  $n$ . Il est vrai pour  $n \in \{0, 1, 2\}$ . Supposons le vrai à un rang  $n$ , et montrons-le au rang  $n+1$ . Soit  $f \in \mathcal{C}^{n+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  bornée et  $0 \leq k \leq n+1$ . Si  $k=0$  ou  $k=n+1$ , il n'y a rien à montrer. Sinon,  $f^{(k-1)}$  est bornée et

$$\begin{aligned} \|f^{(k)}\|_{\infty} &\leq \sqrt{2} \left\| f^{(k-1)} \right\|_{\infty}^{\frac{1}{2}} \left\| f^{(k+1)} \right\|_{\infty}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{2} \left( 2^{\frac{k-1}{2}} \|f\|_{\infty}^{\frac{1}{k}} \left\| f^{(k)} \right\|_{\infty}^{\frac{k-1}{k}} \right)^{\frac{1}{2}} \left( 2^{\frac{n-k}{2}} \left\| f^{(k)} \right\|_{\infty}^{\frac{n-k}{n+1-k}} \left\| f^{(n+1)} \right\|_{\infty}^{\frac{1}{n+1-k}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 2^{\frac{1}{2} + \frac{k-1}{4} + \frac{n-k}{4}} \|f\|_{\infty}^{\frac{1}{2k}} \left\| f^{(k)} \right\|_{\infty}^{\frac{k-1}{2k} + \frac{n-k}{2(n+1-k)}} \left\| f^{(n+1)} \right\|_{\infty}^{\frac{1}{2(n+1-k)}} \\ &= 2^{\frac{n+1}{4}} \|f\|_{\infty}^{\frac{1}{2k}} \left\| f^{(k)} \right\|_{\infty}^{1 - \frac{n+1}{2k(n+1-k)}} \left\| f^{(n+1)} \right\|_{\infty}^{\frac{1}{2(n+1-k)}}. \end{aligned}$$

En divisant par  $\|f^{(k)}\|_{\infty}^{1-\frac{n+1}{2k(n+1-k)}}$ , on obtient finalement

$$\begin{aligned} \|f^{(k)}\|_{\infty}^{\frac{n+1}{2k(n+1-k)}} &\leq 2^{\frac{n+1}{4}} \|f\|_{\infty}^{\frac{1}{2k}} \|f^{(n+1)}\|_{\infty}^{\frac{1}{2(n+1-k)}} \\ \|f^{(k)}\|_{\infty} &\leq 2^{\frac{n+1}{4} \frac{2k(n+1-k)}{n+1}} \|f\|_{\infty}^{\frac{1}{2k} \frac{2k(n+1-k)}{n+1}} \|f^{(n+1)}\|_{\infty}^{\frac{1}{2(n+1-k)} \frac{2k(n+1-k)}{n+1}} \\ &= 2^{\frac{k(n+1-k)}{2}} \|f\|_{\infty}^{1-\frac{k}{n+1}} \|f^{(n+1)}\|_{\infty}^{\frac{k}{n+1}}. \end{aligned} \quad \square$$

### 3.6.5 Analyse dimensionnelle

Les inégalités de Landau–Kolmogorov et de Kolmogorov, tout comme les formules de Taylor, sont dimensionnellement homogène. On cherche une inégalité de la forme

$$\|f^{(k)}\| \leq C \|f\|^{\alpha} \|f^{(n)}\|^{\beta}.$$

Assignons arbitrairement l'unité de la seconde pour la variable et du mètre pour les valeurs. Alors  $f$  est en  $m$ ,  $f^{(k)}$  est en  $m \cdot s^{-k}$  et  $f^{(n)}$  en  $m \cdot s^{-n}$ . Le membre de gauche de l'inégalité est donc en  $m \cdot s^{-k}$  et le membre de droite en  $m^{\alpha} m^{\beta} s^{-n\beta} = m^{\alpha+\beta} s^{-n\beta}$ . L'inégalité est donc dimensionnellement cohérente si et seulement si

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ n\beta = k \end{cases},$$

ce qui impose les valeurs  $\beta = \frac{k}{n}$  et  $\alpha = 1 - \frac{k}{n}$ . Une telle inégalité est donc nécessairement de la forme

$$\|f^{(k)}\| \leq C \|f\|^{1-\frac{k}{n}} \|f^{(n)}\|^{\frac{k}{n}}.$$

Rappelons pour finir que mathématiquement, cette technique d'analyse dimensionnelle signifie que si l'on remplace une fonction  $f$  par la fonction  $t \mapsto \lambda f(\mu^{-1}t)$ , le membre de droite de l'équation est multiplié par  $|\lambda||\mu|^{-k}$ , tandis que le membre de gauche est multiplié par  $|\lambda|^{\alpha+\beta}|\mu|^{-n\beta}$ . Si l'on veut que l'inégalité reste vraie pour toutes les valeurs de  $\lambda$  et de  $\mu$ , les choix  $\beta = \frac{k}{n}$  et  $\alpha = 1 - \frac{k}{n}$  s'imposent.

Cette analyse dimensionnelle ne dépend pas de la norme choisie, ce qui explique que les formules obtenues ont la même forme (à constante près) que l'on utilise la norme  $\|\cdot\|_{\infty}$ , la norme  $\|\cdot\|_{\mathbb{L}^2}$ , ou bien d'autres normes. Ces inégalités sont robustes et admettent de très larges généralisations (inégalités de Gagliardo–Nirenberg, 1958) qui sont largement utilisées en analyse des équations aux dérivées partielles.

## 4 Références

- [FGN·Ana1] : *Oraux X-ENS. Analyse 1*. S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas.
- [FGN·Ana2] : *Oraux X-ENS. Analyse 2*. S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas.
- [FGN·Ana3] : *Oraux X-ENS. Analyse 3*. S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas.
- [Gou] : *Les maths en tête, Analyse*. X. Gourdon.
- [Moi] : *Mathématiques supérieures, Analyse*. J. Moisan, F. Chanet, F. Delmas, N. Tosel.
- [Ska] : *Analyse*. Skandalis.