TD 06
Exercice complémentaire

ROTATIONS ET TRANSFORMATIONS HYPERBOLIQUES

Au cours de cet exercice, on travaillera toujours dans le plan réel $\mathbb{R}^2$.

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. La rotation d'angle θ dans le sens direct est une transformation linéaire. Vue dans la base canonique, à quelle matrice correspond-elle ? On appelera $R(\theta)$ cette matrice.
2. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, calculer la trace et le déterminant de la matrice $R(\theta)$.

On admettra que les rotations commutent. Plus encore, si l'on applique une rotation d'angle θ puis une rotation d'angle θ', on obtient le même résultat que si l'on applique une rotation d'angle θ' puis une rotation d'angle θ, ou que si l'on applique une rotation d'angle $\theta + \theta'$.

3. Reformuler la remarque précédente sous forme matricielle.
4. En déduire les formules d'addition pour le sinus et le cosinus.
5. Montrer que $R(0)$ est l'identité, et que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $R(\theta)^{-1} = R(-\theta)$.
6. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + y^2 = 1$, c'est-à-dire l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 = 1\}$.
7. Montrer que la courbe $\mathcal{C}$ est préservée par les rotations, c'est-à-dire que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $R(\theta)(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.

Nous allons maintenant démontrer des résultats similaires pour les transformations hyperboliques. Rappelons que l'on appelle *cosinus hyperbolique* la fonction :

$$\cosh := \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{e^t + e^{-t}}{2} \end{array} \right. ,$$

et *sinus hyperbolique* la fonction :

$$\sinh := \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{e^t - e^{-t}}{2} \end{array} \right. .$$

De plus, pour tout réel t, on note :

$$RH(t) := \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}.$$

8. Montrer que, pour tout réel t, on a $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$.
9. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, calculer la trace et le déterminant de la matrice $RH(t)$.

On admettra que les transformations $RH(t)$ vérifient la propriété que, pour tous réels s et t,

$$RH(s)RH(t) = RH(s + t) = RH(t)RH(s).$$

10. En déduire les formules d'addition pour le sinus hyperbolique et le cosinus hyperbolique.
11. Montrer que $RH(0)$ est l'identité, et que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $RH(t)^{-1} = RH(-t)$.
12. Tracer la courbe $\mathcal{D}_+$ d'équation $x^2 - y^2 = 1$, ainsi que la courbe $\mathcal{D}_-$ d'équation $-x^2 + y^2 = 1$.
13. Montrer que les courbes $\mathcal{D}_+$ et $\mathcal{D}_-$ sont préservées par toutes les transformations $RH(t)$.