

TD N°4 : MÉTHODE DES CARACTÉRISTIQUES

Dans toute la suite, n désigne un entier naturel non nul et on note B_r la boule de \mathbb{R}^n centrée en 0 et de rayon $r > 0$.

Exercice 1 : équation de transport avec terme source et terme d'amortissement

On considère $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^n)$ ainsi que a et $S \in C^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$. Montrer que l'équation

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + v \cdot \nabla_x u(t, x) + a(t, x)u(t, x) = S(t, x) & \text{sur } \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^n \\ u(0, \cdot) = u_0 \end{cases}$$

admet une unique solution $u \in C^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$ et donner une expression de cette solution.

Exercice 2 : méthode des caractéristiques

1. Soit $v \in \mathbb{R}^n$ et $f_0 \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$. Montrer que le problème de Cauchy d'inconnue $f = f(t, x)$

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = 0, \quad f(0, x) = f_0(x),$$

admet une unique solution $f \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$, donnée par la formule

$$f(t, x) = f_0(x - tv), \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}_+, x \in \mathbb{R}^n.$$

2. [Lemme de Gronwall] Soient $A > 0$, $B > 0$ et $\phi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue telle que, pour tout $t \geq 0$,

$$\phi(t) \leq A + B \int_0^t \phi(s) ds.$$

Montrer que, pour tout $t \geq 0$, on a l'inégalité $\phi(t) \leq Ae^{Bt}$.

3. Soit $T > 0$ et $V: [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs admettant des dérivées partielles d'ordre 1 par rapport aux variables x_j pour $j = 1, \dots, d$ et vérifiant les hypothèses suivantes

(H1) V et $\nabla_x V$ sont continues sur $[0, T] \times \mathbb{R}^n$,

et il existe une constante $\kappa > 0$ telle que, pour tout $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$,

(H2) $|V(t, x)| \leq \kappa(1 + |x|)$.

On considère maintenant le problème à coefficients variables

$$\partial_t f(t, x) + V(t, x) \cdot \nabla_x f(t, x) = 0, \quad f(0, x) = f_0(x),$$

pour lequel on souhaite étendre la méthode présentée à la question 1. pour le cas de coefficients constants.

On dit que γ est une courbe intégrale du champ V passant par x à l'instant t si $\gamma: s \mapsto \gamma(s) \in \mathbb{R}^n$ vérifie

$$\frac{d}{ds} \gamma(s) = V(s, \gamma(s)), \quad \gamma(t) = x.$$

Le théorème de Cauchy-Lipschitz entraîne l'existence locale d'une telle courbe intégrale.

Montrer que pour tout $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ la courbe intégrale $s \mapsto \gamma(s)$ de V passant par x à l'instant t est définie pour tout $s \in [0, T]$. Dans la suite on notera $s \mapsto X(s, t, x)$ cette courbe intégrale, qui est donc par définition solution de

$$\partial_s X(s, t, x) = V(s, X(s, t, x)), \quad X(t, t, x) = x.$$

L'application $X : [0, T] \times [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ainsi définie est appelée le *flot caractéristique* de l'équation $\partial_t + V \cdot \nabla_x$.

4. Soient $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle

$$\dot{y}(s) = y(s)^2, \quad y(t) = x$$

et en déduire que l'on ne peut pas définir le flot de $\partial_t + x^2 \partial_x$ de façon globale (on remarque que dans ce cas, l'hypothèse **(H2)** n'est pas vérifiée).

5. Montrer que pour tous $t_1, t_2, t_3 \in [0, T]$, on a

$$X(t_3, t_2, X(t_2, t_1, x)) = X(t_3, t_1, x).$$

6. Montrer que $\partial_s \partial_{x_j} X(s, t, x)$ et $\partial_{x_j} \partial_s X(s, t, x)$ existent pour tous $(s, t, x) \in]0, T[\times]0, T[\times \mathbb{R}^n$, et se prolongent en des fonctions continues sur $[0, T] \times [0, T] \times \mathbb{R}^n$ et que

$$\partial_s \partial_{x_j} X(s, t, x) = \partial_{x_j} \partial_s X(s, t, x),$$

pour tout $(s, t, x) \in [0, T] \times [0, T] \times \mathbb{R}^n$.

7. Montrer que pour tout $(s, t) \in [0, T] \times [0, T]$ l'application

$$X(s, t, \cdot) : x \mapsto X(s, t, x)$$

est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}^n sur lui-même.

8. Montrer que $X \in \mathcal{C}^1([0, T] \times [0, T] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$.

9. Montrer que

$$\partial_t X(0, t, x) + \sum_{j=0}^d V_j(t, x) \partial_{x_j} X(0, t, x) = 0,$$

pour tout $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$.

10. Soit $f_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$. Montrer que la fonction f définie par

$$f(t, x) = f_0(X(0, t, x))$$

est \mathcal{C}^1 sur $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ et vérifie

$$\partial_t f(t, x) + V(t, x) \cdot \nabla_x f(t, x) = 0, \quad f(0, x) = f_0(x).$$

Exercice 3 : équation de Burgers

On considère l'équation de Burgers en dimension 1 :

$$(1) \quad \begin{cases} \partial_t u(t, x) + \frac{1}{2} \partial_x (u^2)(t, x) = 0 & \text{sur } \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R} \\ u(0, \cdot) = u_0. \end{cases}$$

qui peut s'écrire aussi sous la forme

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + u(t, x) \partial_x u(t, x) = 0 & \text{sur } \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R} \\ u(0, \cdot) = u_0. \end{cases}$$

Sous cette seconde forme, on voit apparaître une équation de transport (non linéaire) et plus précisément, u est solution d'une équation de transport dont la vitesse de propagation au point x et à l'instant t est égale à $u(t, x)$.

1. Soit $T > 0$. On suppose que u est une solution de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, T[\times \mathbb{R}$ de l'équation (1). Appliquer la méthode des caractéristiques et prouver que pour tout $0 \leq s < T$ et tout $z \in \mathbb{R}$, on a :

$$u(s, z + su(0, z)) = u(0, z).$$

2. On suppose que $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, que u_0 est bornée ainsi que sa dérivée u_0' . Dans l'exercice 2 du TD 1, on a vu qu'en posant

$$T = \frac{1}{\sup_{z \in \mathbb{R}} (\max(0, -u_0'(z)))},$$

l'équation (1) admet une solution de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, T[\times \mathbb{R}$. Montrer l'unicité de cette solution.

Exercice 4 : équation eikonale

1. On note $\mathbb{S} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1^2 + x_2^2 = 1\}$. On considère le problème suivant en dimension 2 :

$$\begin{cases} (\partial_{x_1} u)^2 + (\partial_{x_2} u)^2 = 1 & \text{sur } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ u = 0 & \text{sur } \mathbb{S}. \end{cases}$$

Appliquer la méthode des caractéristiques à cette équation et en déduire deux solutions possibles.

2. Soit $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Trouver une solution du problème suivant

$$\begin{cases} \partial_{x_1} u + x_1 \partial_{x_2} u = u & \text{sur } \mathbb{R}^2 \\ u(1, \cdot) = h & \text{sur } \mathbb{R}. \end{cases}$$

au moyen de la méthode des caractéristiques.