TD n°2 : Distributions harmoniques

Dans tout le TD, n désigne un entier naturel non nul.

Exercice 1 : inégalité de Caccioppoli et régularité des fonctions harmoniques
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une fonction $u \in H^1(\Omega)$ à valeurs réelles est dite harmonique si

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi = 0, \quad \forall\, \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

1. Supposons que $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ est harmonique et considérons deux boules concentriques $B(r) \subset\subset B(R) \subset\subset \Omega$ de rayons respectivement $r > 0$ et $R > 0$ (on a noté $\subset\subset$ la stricte inclusion). Montrer que pour tout $c \in \mathbb{R}$, on a :

$$\int_{B(r)} |\nabla u|^2 \, dx \leq \frac{16}{(R-r)^2} \int_{B(R) \setminus B(r)} |u - c|^2 \, dx.$$

[Indication : introduire $\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ telle que $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta = 1$ sur $B(r)$, $\eta = 0$ sur $\Omega \setminus B(R)$ et $|\nabla \eta| \leq 2/(R-r)$ et choisir $\varphi = (u-c)\eta^2$ comme fonction test.]
2. Considérons une boule $B(R) \subset\subset \Omega$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe une constante $K(R,k)$ telle que pour toute $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ vérifiant $\Delta u = 0$, on a :

$$\|u\|^2_{H^k(B(R/2))} \leq K(R,k) \int_{B(R)} u^2 \, dx.$$

3. Montrer que si $u \in H^1(\Omega)$ est harmonique, alors $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.
[Indication : introduire une approximation de l'unité.]

Exercice 2 : inégalité de Caccioppoli généralisée
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $A = (a_{ij}(x)) \in L^\infty(\Omega, \mathcal{M}_d(\mathbb{R}))$ une fonction à valeurs matricielles et $\alpha > 0$ tels que :

$$\forall\, x \in \Omega, \forall\, \xi \in \mathbb{R}^d, \qquad \alpha|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)\xi_i\xi_j.$$

Soient $b \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$ et $c \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. On considère l'opérateur linéaire défini par :

$$\begin{aligned} Lu &= -\mathrm{div}(A(x)\nabla u) + b(x).\nabla u + c(x)u \\ &= -\sum_{i,j=1}^d \partial_{x_i}(a_{ij}(x)\partial_{x_j} u) + \sum_{i=1}^d b_i(x)\partial_{x_i} u + c(x)u. \end{aligned}$$

Soient $f \in L^2(\Omega)$ et $u \in H^1(\Omega)$ telles que $Lu = f$ au sens des distributions. Soit $\Omega' \subset \Omega$ un ouvert borné tel que $\overline{\Omega'} \subset \Omega$. Montrer que :

$$\int_{\Omega'} |\nabla u|^2 dx \leq C \int_\Omega (u^2 + f^2) dx.$$

[Indication : on pourra utiliser comme fonction test $\eta^2 u$ où $\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ et vaut 1 sur Ω'.]

Exercice 3 : estimation des dérivées d'une fonction harmonique

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ une fonction harmonique dans Ω.

1. Montrer que si $\overline{B}(x_0, r) \subset \Omega$, alors, pour tout $j = 1, ..., n$:

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(x_0) = \frac{1}{|B(x_0, r)|} \int_{\partial B(x_0,r)} u(y)\nu_j(y)dy$$

où ν_j est la j-ième coordonnée du vecteur normal unitaire à $\partial B(x_0, r)$.

2. On suppose que $m \leq u \leq M$ sur $\partial B(x_0, r)$ pour deux constantes m et M. Montrer que :

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_j}(x_0) \right| \leq C_n \frac{M - m}{r}$$

où C_n est une constante qui dépend uniquement de la dimension n.

3. En déduire que si $m \leq u \leq M$ sur Ω, alors :

$$\forall\, x \in \Omega, \qquad \|\nabla u(x)\| \leq C'_n \frac{M - m}{d(x, \partial\Omega)}$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne usuelle.

Exercice 4 : conséquences de la propriété de la moyenne pour les fonctions harmoniques

1. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ harmonique dans Ω. Soit $x_0 \in \Omega$, on note $\rho(x_0) = \mathrm{dist}(x_0, \partial\Omega) > 0$. Montrer que pour tout $r \in]0, \rho(x_0)[$ et toute fonction radiale $y \mapsto \psi(|y|) \in L^1(B(0, r))$, on a l'égalité suivante :

$$f(x_0) \int_{B(0,r)} \psi(|y|)\, dy = \int_{B(0,r)} f(x_0 + y)\psi(|y|)\, dy.$$

2. Montrer que toute fonction harmonique sur $\mathbb{R}^n$ tendant vers 0 à l'infini est identiquement nulle sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 5 : régularité d'une distribution harmonique

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On dira que T est une distribution harmonique sur Ω si $\Delta T = 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Le but de l'exercice est de montrer que si T est une distribution harmonique sur Ω, T est en fait une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω.

1. a) Soient $x_0 \in \Omega$ et $r > 0$ tels que $B(x_0, 2r) \subset \Omega$. On introduit $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ qui satisfait

$$0 \leq \phi \leq 1, \quad \mathrm{supp}(\phi) \subset B(x_0, 3r/2), \quad \phi(x) = 1 \text{ pour } |x - x_0| \leq r.$$

Montrer que ϕT est une distribution harmonique sur $B(x_0, r)$. On notera encore ϕT le prolongement de $\phi T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ par 0 en dehors de Ω.

b) Soit $(\theta_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une suite régularisante positive de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ satisfaisant

$$\mathrm{supp}(\theta_\varepsilon) \subset B(0, \varepsilon), \qquad \int_{\mathbb{R}^n} \theta_\varepsilon(x)\, dx = 1.$$

Montrer que $\theta_\varepsilon * (\phi T) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ est harmonique dans $B(x_0, r - \varepsilon)$.

c) On suppopse maintenant que $0 < \varepsilon < r/4$. On considère la fonction radiale $\Psi(x) = \psi(|x|^2)$ à support dans $B(0, r/4)$ avec $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+)$ et $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(|z|^2)\, dz = 1$. Montrer que pour tout $x \in B(x_0, r/2)$,

$$\theta_\varepsilon * (\phi T)(x) = \Psi * (\theta_\varepsilon * (\phi T))(x).$$

d) Montrer que $\Psi * (\theta_\varepsilon * (\phi T))$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^n$ vers $\Psi * (\phi T)$ lorsque $\varepsilon \to 0$.
e) Montrer que T est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $B(x_0, r/2)$ puis conclure.

2. Montrer que toute distribution tempérée T harmonique sur $\mathbb{R}^n$ (c'est-à-dire que $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ vérifie $\Delta T = 0$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$) est une fonction polynomiale.

Pour aller plus loin :

- Récemment, Alexander Logunov et Eugenia Malinnikova ont réalisé plusieurs avancées dans la conjecture de Yau sur les ensembles nodaux (c'est-à-dire le lieu d'annulation) des fonctions harmoniques et des fonctions propres. Le document "Review of Yau's conjecture on zero sets of Laplace eigenfunctions", disponible sur Arxiv, expose ces travaux de façon claire et (assez !) simple.
- Ceux qui aiment la géométrie différentielle trouveront peut-être leur bonheur dans l'étude des "Harmonic maps" (voir Wikipedia par exemple).