

Programme du groupe de lecture “Problèmes variationnels, optimisation et contrôle”

Cyril LETROUIT

Septembre 2021-Janvier 2022

D’après le livre “Analyse numérique et optimisation” de Grégoire Allaire.

Résumé

De nombreux problèmes concrets peuvent être modélisés par un petit nombre de problèmes d’optimisation ou d’équations aux dérivées partielles (EDPs) : la seule équation de la chaleur, par exemple, sert à reconstruire des images floutées, modélise la diffusion aléatoire de particules, explique (via la réaction-diffusion) les motifs sur la peau de certains animaux, mais apparaît aussi comme un morceau des équations de Navier-Stokes et sert de « modèle » pour le flot de Ricci.

Ce groupe de lecture est une introduction à la modélisation de certains de ces problèmes et à leur résolution. Nous utiliserons essentiellement des outils d’analyse : nous introduirons les distributions, les espaces de Sobolev, la notion de convergence faible, expliquerons la descente de gradient, des rudiments de théorie spectrale, etc.

Remarques générales

Contact : Vous pouvez me joindre par mail à l’adresse cyril.letrouit@ens.fr ou venir me voir à mon bureau (le C14, à l’entrée de l’Espace Cartan), en m’ayant prévenu avant.

Préparation d’un exposé : Vous viendrez me voir au moins une fois dans la semaine précédant l’exposé, en ayant travaillé un peu avant, pour que l’on discute de votre exposé et que vous me posiez vos questions. Si vous le souhaitez, vous pouvez faire l’exposé en entier devant moi.

Support : Nous suivons le livre “Analyse numérique et optimisation” de Grégoire Allaire, en faisant approximativement un chapitre par semaine. Ce livre est disponible à la bibliothèque de l’ENS. Vous pouvez aussi l’acheter, pour pouvoir l’annoter (c’est un bon investissement !).

Contenu des exposés : Pour chaque séance, les • ci-dessous indiquent ce qui doit être traité dans l’exposé et les ◊ indiquent ce qui peut être traité selon vos goûts personnels et le temps disponible. Il faut compter 1h20 par exposé pour laisser le temps pour des questions. Il est très important de faire des exposés clairs avec éventuellement des dessins et de la couleur.

Modifications : Si vous voulez traiter quelque chose qui n’est pas prévu dans les lignes qui suivent, n’hésitez pas à me demander, le programme est négociable.

Programme détaillé des séances

1 Introduction

- Un exemple de modélisation
- Quelques modèles classiques
- Calcul numérique par différences finies
- Notion de problème bien posé
- Classification des équations aux dérivées partielles
- Espaces de Hilbert

2 Différences finies pour l'équation de la chaleur

- Divers exemples de schémas (Section 2.2.1)
- Consistance et précision (Section 2.2.2)
- Stabilité et analyse de Fourier (Section 2.2.3)
- Convergence des schémas (Section 2.2.4)
- Limitations de la méthode des différences finies (fin de la Section 2.2.6)
- ◇ Schémas multiniveaux (Section 2.2.5)
- ◇ Le cas multidimensionnel (Section 2.2.6)
- ◇ Autres modèles (Section 2.3)

3 Formulation variationnelle des problèmes elliptiques

- Généralités (Section 3.1)
- Approche variationnelle (Section 3.2)
- Théorie de Lax-Milgram (Section 3.3)
- Inégalité de Poincaré (Lemme 3.3.6)
- ◇ Exercice 3.3.1

4 Espaces de Sobolev

- Fonctions de carré sommable et dérivation faible (Section 4.2)
- Espace $H^1(\Omega)$ (Section 4.3.1) et espace $H_0^1(\Omega)$ (section 4.3.2)
- Traces et formule de Green (Section 4.3.3) dont l'exercice 4.3.4
- Un résultat de compacité (Section 4.3.4)
- Espaces $H^m(\Omega)$ (Section 4.3.5)
- ◇ Quelques compléments utiles (Section 4.4)

5 Problèmes elliptiques - Étude du Laplacien

- Conditions aux limites de Dirichlet (Section 5.2.1)
- Conditions aux limites de Neumann (Section 5.2.2) - commencer éventuellement à l'équation (5.25)
- Coefficients variables (Section 5.2.3)
- Propriétés qualitatives (Section 5.2.4) : théorèmes 5.2.22 et 5.2.26 (au moins l'énoncé)
- ◊ Propriétés qualitatives (Section 5.2.4) : le reste
- ◊ Résolution d'autres modèles (Section 5.3)

6 Éléments finis

- Approximation variationnelle (Section 6.1)
- Éléments finis en dimension $N = 1$ (Section 6.2)
- ◊ Éléments finis en dimension $N \geq 2$ (Section 6.3), notamment théorème 6.3.13.

7 Problèmes aux valeurs propres

- Motivation et exemples (Section 7.1)
- Théorie spectrale (Section 7.2)
- Valeurs propres d'un problèmes elliptique (Section 7.3, sauf la section 7.3.3)
- Méthodes numériques (Section 7.4)
- ◊ Autres modèles (Section 7.3.3)

8 Problèmes d'évolution (cas parabolique)

- Motivations et exemples (Sections 8.1.1 et 8.1.2)
- Existence et unicité dans le cas parabolique (Section 8.2)
- Propriétés qualitatives dans le cas parabolique (Section 8.4)
- Méthodes numériques dans le cas parabolique (Section 8.6)
- ◊ Le cas hyperbolique (Sections 8.1.3, 8.3, 8.5 et 8.7)

9 Introduction à l'optimisation

- Motivations et exemples (Section 9.1)
- Existence d'un minimum en dimension infinie (Section 9.2)

10 Conditions d'optimalité

- Introduction (Section 10.1.1)
- Différentiabilité (Section 10.1.2)
- Inéquations d'Euler et contraintes convexes (Section 10.2.1)
- Multiplicateurs de Lagrange (Section 10.2.2)

11 Point-selle, Kuhn-Tucker, dualité et applications

- Point-selle (Section 10.3.1)
- Théorème de Kuhn et Tucker (Section 10.3.2)
- Dualité (Section 10.3.3)
- Applications (Section 10.4)

12 Algorithmes numériques pour l'optimisation

- Algorithmes de type gradient, cas sans contraintes (Section 10.5.2)
- Algorithmes de type gradient, cas avec contraintes (Section 10.5.3)
- Méthode de Newton (Section 10.5.4)

13 Programmation linéaire et polyèdres entiers

- Programmation linéaire, algorithme du simplexe (Section 11.2)
- Polyèdres entiers (Section 11.3)

14 Programmation dynamique, algorithmes gloutons

- Programmation dynamique, principe de Bellman (Section 11.4)
- Algorithmes gloutons (Section 11.5)
- ◇ Séparation et relaxation (Section 11.6)