
CH_0 -TRIVIALITÉ UNIVERSELLE D'HYPERSURFACES CUBIQUES PARTIELLEMENT DIAGONALES

par

J.-L. Colliot-Thélène

Résumé. — Toute hypersurface cubique lisse complexe de dimension au moins 2 dont l'équation est donnée par l'annulation d'une somme de formes cubiques à variables séparées, chaque forme impliquant au plus trois variables, est universellement CH_0 -triviale.

Abstract. — If a smooth cubic hypersurface of dimension at least 2 is defined by the vanishing of a sum of cubic forms in independent variables and each of these forms involves at most 3 variables, then the cubic hypersurface is universally CH_0 -trivial : there is an integral Chow decomposition of the diagonal.

Introduction

Pour X une variété propre sur un corps on note $CH_0(X)$ le groupe de Chow des zéro-cycles de X modulo l'équivalence rationnelle et on note $A_0(X) \subset CH_0(X)$ le sous-groupe des classes de zéro-cycles de degré zéro.

On dit **[1, 3]** qu'une \mathbb{C} -variété projective et lisse X est universellement CH_0 -triviale si, pour tout corps F contenant \mathbb{C} (et l'on ne considérera désormais que de tels corps), l'application $\deg_F : CH_0(X_F) \rightarrow \mathbb{Z}$ est un isomorphisme, soit encore $A_0(X_F) = 0$.

Si X est rationnelle, ou stablement rationnelle, ou rétracte rationnelle, alors X est universellement CH_0 -triviale **[3, Lemme 1.5]**. Ceci a été utilisé dans divers travaux récents pour infirmer la rationalité stable (voir le rapport **[5]**).

La question de la rationalité (stable) des hypersurfaces cubiques lisses $X \subset \mathbf{P}_{\mathbb{C}}^n$ ($n \geq 3$) a fait et continue à faire l'objet de nombreux travaux. On ne connaît aucune telle hypersurface de dimension impaire qui soit rationnelle,

ou même seulement rétracte rationnelle. On connaît des familles d'hypersurfaces cubiques lisses de dimension paire qui sont rationnelles. Certaines sont classiques, d'autres, dans \mathbf{P}^5 , ont été obtenues par B. Hassett (voir le rapport [4]). On doute que toutes soient (stablement) rationnelles.

On dit qu'une variété irréductible X sur \mathbb{C} de dimension m est unirationnelle de degré d s'il existe une application rationnelle, dominante, de degré d , de $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^m$ vers X . On sait que toute hypersurface cubique lisse $X \subset \mathbf{P}_{\mathbb{C}}^n$ ($n \geq 3$) est unirationnelle de degré 2. Faute d'établir la rationalité d'une telle hypersurface X , on s'intéresse à la question de l'unirationalité de degré impair de X , qui entraîne que X est universellement CH_0 -triviale.

C. Voisin [7] a récemment étudié la question de la CH_0 -trivialité des hypersurfaces cubiques. Pour X de dimension 3, elle a donné un critère [7, Cor. 4.4] en termes de la classe minimale sur la jacobienne intermédiaire. Cela lui permet [7, Thm. 4.5] de montrer l'existence de telles hypersurfaces $X \subset \mathbf{P}^4$, dont l'hypersurface de Fermat, qui sont universellement CH_0 -triviales. Pour X de dimension 4, elle établit [7, Thm. 5.6] la CH_0 -trivialité pour beaucoup d'hypersurfaces cubiques lisses $X \subset \mathbf{P}^5$ qui sont spéciales au sens de Hassett.

Dans cet article, je montre de façon élémentaire : *Pour tout entier $n \geq 4$, toute hypersurface cubique X lisse dans $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^n$ dont l'équation s'écrit $\sum_i \Phi_i$, où les Φ_i sont des formes homogènes à variables séparées et chacune a au plus trois variables, est universellement CH_0 -triviale.*

Il existe donc des hypersurfaces cubiques lisses de toute dimension ≥ 2 qui sont universellement CH_0 -triviales, ce qui ne semblait pas connu pour X de dimension impaire au moins égale à 5.

Pour tout entier pair $m \geq 1$, je donne aussi des familles d'hypersurfaces cubiques lisses de dimension m qui sont unirationnelles de degré impair. Pour $m = 4$, je ne sais pas si ces hypersurfaces sont spéciales au sens de Hassett.

Je remercie Claire Voisin pour diverses suggestions.

1. Rappels

Le lemme suivant est un cas particulier facile de [3, Prop. 1.8].

Lemme 1.1. — *Soient X et Y deux variétés connexes projectives et lisses sur \mathbb{C} . Si X est universellement CH_0 -triviale, alors, pour tout corps F , la projection $CH_0(X_F \times_F Y_F) \rightarrow CH_0(Y_F)$ est un isomorphisme, et, pour tout choix d'un point $P \in X(\mathbb{C})$, le morphisme $Y \rightarrow X \times Y$ donné par $M \mapsto (P, M)$ induit un isomorphisme $CH_0(Y_F) \rightarrow CH_0(X_F \times_F Y_F)$.*

Proposition 1.2. — *Soient $n \geq 2$ et $m \geq 2$ des entiers et $f(x_1, \dots, x_n)$ et $g(y_1, \dots, y_m)$ des formes homogènes géométriquement irréductibles, de même*

degré d , à coefficients dans un corps k . Soit $X_f \subset \mathbf{P}_k^n$, resp. $X_g \subset \mathbf{P}_k^m$ l'hypersurface définie par $f(x_1, \dots, x_n) + x_0^d = 0$, resp. par $g(y_1, \dots, y_m) + y_0^d = 0$. L'application rationnelle de $\mathbf{P}^n \times_k \mathbf{P}^m$ vers \mathbf{P}_k^{n+m-1} envoyant le point de coordonnées bihomogènes $(x_0, \dots, x_n; y_0, \dots, y_m)$ sur le point de coordonnées homogènes $(x_1/x_0, \dots, x_n/x_0, y_1/y_0, \dots, y_m/y_0)$ induit une application rationnelle dominante de degré d de $X_f \times X_g$ sur l'hypersurface de \mathbf{P}_k^{n+m-1} d'équation

$$f(z_1, \dots, z_n) - g(z_{n+1}, \dots, z_{n+m}) = 0.$$

Ce fait a été utilisé par Shioda et Katsura [6] dans l'étude des conjectures de Hodge et de Tate pour les hypersurfaces diagonales.

Proposition 1.3. — Soit $X \subset \mathbf{P}_\mathbb{C}^n$, $n \geq 3$ une hypersurface cubique lisse.

- (i) X est unirationnelle de degré 2.
- (ii) Pour tout corps F , on a $2A_0(X_F) = 0$.

C'est bien connu. Pour (i), voir [1, Thm. 2.2]. Pour (ii), voir [1, Cor. 2.3].

2. Hypersurfaces cubiques partiellement diagonales

Proposition 2.1. — Soit $Y \subset \mathbf{P}_\mathbb{C}^n$ avec $n \geq 3$ une hypersurface cubique lisse d'équation $f(x_0, \dots, x_{n-1}) + x_n^3 = 0$. Supposons que Y est unirationnelle de degré d . Alors toute hypersurface cubique lisse $X \subset \mathbf{P}_\mathbb{C}^{n+2}$ d'équation

$$f(x_0, \dots, x_{n-1}) - h(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}) = 0$$

dans $\mathbf{P}_\mathbb{C}^{n+2}$ est unirationnelle de degré $3d$.

Démonstration. — Comme la surface cubique lisse de $\mathbf{P}_\mathbb{C}^3$ d'équation $h(y_0, y_1, y_2) + y_3^3 = 0$ est rationnelle, l'énoncé résulte de la proposition 1.2. \square

Convenons qu'une forme non singulière en s variables est de type (a_1, \dots, a_r) si elle est somme de formes Φ_i à variables séparées, que a_i est le nombre de variables de Φ_i , et $s = \sum_i a_i$.

Théorème 2.2. — Soit $m \geq 1$.

- (i) Toute hypersurface cubique lisse dans \mathbf{P}^{6m-1} de type $(3, \dots, 3)$ est unirationnelle de degré une puissance de 3.
- (ii) Toute hypersurface cubique lisse dans \mathbf{P}^{6m+1} de type $(3, \dots, 3, 2)$ est unirationnelle de degré une puissance de 3.
- (iii) Toute hypersurface cubique lisse dans \mathbf{P}^{6m+3} de type $(3, \dots, 3, 1)$ est unirationnelle de degré une puissance de 3.

Démonstration. — C'est une conséquence combinatoire de la proposition 2.1. L'hypersurface de type (3, 1) est rationnelle. De (3, 1) et (3, 1) on obtient (3, 3). On a donc (3, 2, 1). De (3, 2, 1) et (3, 1) on obtient (3, 3, 2). On a donc (3, 3, 1, 1). De (3, 3, 1, 1) et (3, 1) on obtient (3, 3, 3, 1). Puis (3, 3, 3, 3), etc. \square

Compte tenu de la proposition 1.3, le pgcd des degrés d'unirationalité des hypersurfaces du théorème est égal à 1. Ceci implique en particulier $A_0(X_F) = 0$ pour tout corps F .

Remarque 2.3. — (a) On confrontera les théorèmes 2.2 et 2.8 avec le fait classique que toute hypersurface cubique lisse $X \subset \mathbf{P}_{\mathbb{C}}^{2n-1}$ de type $(2, \dots, 2)$ i.e. d'équation $\sum_{i=1}^n f_i(u_i, v_i) = 0$, est rationnelle, car elle contient deux espaces linéaires $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^{n-1}$ sans point commun.

(b) Compte tenu de la proposition 1.3, le pgcd des degrés d'unirationalité des hypersurfaces du théorème 2.2 est égal à 1. Ceci implique en particulier $A_0(X_F) = 0$ pour tout corps F .

Remarque 2.4. — Le théorème 2.2 s'applique aux hypersurfaces cubiques lisses de dimension 4 données dans $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^5$ par une équation

$$f(x_0, x_1, x_2) + g(x_3, x_4, x_5) = 0.$$

Je ne sais pas si toute telle hypersurface est spéciale au sens de Hassett, c'est-à-dire si elle contient un 2-cycle non homologue à un multiple d'une section de $X \subset \mathbf{P}_{\mathbb{C}}^5$ par un espace linéaire $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^3 \subset \mathbf{P}_{\mathbb{C}}^5$.

Établissons un énoncé d'intérêt général.

Proposition 2.5. — Soit X/\mathbb{C} une variété projective et lisse telle que $A_0(X) = 0$. S'il existe une courbe Γ projective, lisse, connexe et un morphisme $\Gamma \rightarrow X$ tels que, pour tout corps F , l'application induite $CH_0(\Gamma_F) \rightarrow CH_0(X_F)$ soit surjective, alors, pour tout corps F , l'application $\deg_F : CH_0(X_F) \rightarrow \mathbb{Z}$ est un isomorphisme, en d'autres termes X est universellement CH_0 -triviale.

Démonstration. — L'hypothèse $A_0(X) = 0$ permet de produire un entier $N > 0$ tel que $NA_0(X_F) = 0$ pour tout corps F (cf. [2, Prop. 11]). Par hypothèse, $A_0(\Gamma_F) \rightarrow A_0(X_F)$ est surjectif. Soit J la jacobienne de Γ . Pour tout corps F , on a $A_0(\Gamma_F) = J(F)$. Soit $K := \mathbb{C}(X)$ le corps des fonctions de X . Alors $J(\mathbb{C}(X)) = J(\mathbb{C})$, parce que l'hypothèse $A_0(X) = 0$ implique que la variété d'Albanese de X est triviale. Ainsi $J(K)/N = J(\mathbb{C})/N = 0$ et donc $A_0(X_K) = NA_0(X_K) = 0$. Ainsi ([1, Lemma 1.3]) la diagonale se décompose dans $X \times X$ et, pour tout corps F , on a $A_0(X_F) = 0$. \square

Remarque 2.6. — Soit X une \mathbb{C} -variété projective et lisse, géométriquement connexe. Soit $\delta(X)$ le plus petit entier $\delta \leq \dim(X)$ pour lequel il existe une \mathbb{C} -variété projective lisse connexe Y de dimension δ et un morphisme $\phi : Y \rightarrow X$ tels que, pour tout corps F , l'application $\phi_{F,*} : CH_0(Y_F) \rightarrow CH_0(X_F)$ soit surjective. Pour X hypersurface cubique lisse de dimension ≥ 3 très générale, C. Voisin [7, Thm. 5.3] montre que $\delta(X) < \dim(X)$ implique $\delta(X) = 0$. La proposition 2.5 peut se reformuler ainsi : *Pour toute variété X projective et lisse telle que $A_0(X) = 0$, $\delta(X) \leq 1$ implique $\delta(X) = 0$.*

Proposition 2.7. — *Soit $Y \subset \mathbf{P}_{\mathbb{C}}^n$ avec $n \geq 3$ une hypersurface cubique lisse d'équation $f(x_0, \dots, x_{n-1}) + x_n^3 = 0$. Supposons que Y est universellement CH_0 -triviale. Alors :*

(i) *Toute hypersurface cubique lisse $X \subset \mathbf{P}^{n+1}$ d'équation*

$$f(x_0, \dots, x_{n-1}) - g(x_n, x_{n+1}) = 0$$

dans $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^{n+1}$ est universellement CH_0 -triviale.

(ii) *Toute hypersurface cubique lisse X d'équation*

$$f(x_0, \dots, x_{n-1}) - h(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}) = 0$$

dans $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^{n+2}$ est universellement CH_0 -triviale.

Démonstration. — (i) Soit $\Gamma \subset \mathbf{P}_{\mathbb{C}}^2$ la courbe d'équation $g(u, v) + w^3 = 0$. La proposition 1.2 fournit une application rationnelle dominante, de degré 3, de $X \times \Gamma$ vers Y . Il existe une variété W projective et lisse, un morphisme birationnel $W \rightarrow X \times \Gamma$ induisant un morphisme $f : W \rightarrow Y$ dominant génériquement fini de degré 3. Il existe un point $P \in X(\mathbb{C})$ tel que le morphisme $\Gamma \rightarrow X \times \Gamma$ donné par $M \mapsto (P, M)$ se relève en un morphisme $\Gamma \rightarrow W$. Soit F un corps contenant \mathbb{C} . Considérons les applications induites sur les groupes de Chow des zéro-cycles au-dessus de F . Considérons les applications

$$CH_0(\Gamma_F) \rightarrow CH_0(W_F) \rightarrow CH_0(X_F \times_F \Gamma_F).$$

La seconde application est un isomorphisme par invariance birationnelle du groupe de Chow des zéro-cycles sur les variétés projectives et lisses. L'application composée est un isomorphisme par application du lemme 1.1. Ainsi l'application $CH_0(\Gamma_F) \rightarrow CH_0(W_F)$ est un isomorphisme. Comme le morphisme $W \rightarrow Y$ est génériquement fini de degré 3, le sous-groupe $3A_0(Y_F) \subset A_0(Y_F)$ est dans l'image de $A_0(W_F)$, et donc dans l'image de $A_0(\Gamma_F) \rightarrow A_0(Y_F)$ via l'application composée $\Gamma \rightarrow W \rightarrow Y$. D'après la proposition 1.3, on a $2A_0(Y_F) = 0$. Ainsi, pour F , le groupe $A_0(Y_F)$ est dans l'image de $A_0(\Gamma_F)$. La proposition 2.5 donne alors $A_0(Y_F) = 0$ pour tout F .

(ii) La démonstration est plus simple. La courbe Γ est remplacée par la surface cubique lisse S d'équation $g(u, v, t) + w^3 = 0$, qui est une variété rationnelle, et donc satisfait $A_0(S_F) = 0$ pour tout corps F . \square

Théorème 2.8. — *Toute hypersurface cubique lisse $X \subset \mathbf{P}_{\mathbb{C}}^n$ de dimension au moins 2 dont l'équation est donnée par une forme $\sum_i \Phi_i$, où les Φ_i sont à variables séparées et chacune a au plus 3 variables, est universellement CH_0 -triviale.*

Démonstration. — Toute forme de type $(1, 1, 1, 1)$ définit une surface cubique lisse, donc rationnelle, donc universellement CH_0 -triviale. En appliquant de façon répétée le théorème 2.7(i), on obtient que toute forme non singulière diagonale, i.e. de type $(1, \dots, 1)$ en au moins 4 variables, définit une hypersurface lisse universellement CH_0 -triviale. En appliquant le théorème 2.7 de façon répétée, on peut ensuite remplacer chacun des 1 dans $(1, \dots, 1)$ par 2 ou par 3. \square

Remarque 2.9. — C'est une question ouverte s'il existe une hypersurface cubique lisse $X \subset \mathbf{P}_{\mathbb{C}}^4$ avec une application rationnelle $\mathbf{P}^3 \cdots \rightarrow X$ de degré impair. La démonstration de la proposition 2.7(i), via la proposition 2.5, mène à la question a priori plus facile : Pour $X \subset \mathbf{P}_{\mathbb{C}}^4$ hypersurface cubique lisse quelconque, existe-t-il une application rationnelle de degré impair $\Gamma \times_{\mathbb{C}} \mathbf{P}^2 \cdots \rightarrow X$, avec Γ courbe convenable ?

Références

- [1] A. Auel, J.-L. Colliot-Thélène et R. Parimala, Universal unramified cohomology of cubic fourfolds containing a plane, à paraître dans *Brauer groups and obstruction problems : moduli spaces and arithmetic* (Palo Alto, 2013), A. Auel, B. Hassett, T. Várilly-Alvarado, and B. Viray, eds., Progress in Mathematics, Birkhäuser.
- [2] J.-L. Colliot-Thélène, Un théorème de finitude pour le groupe de Chow des zéro-cycles d'un groupe algébrique linéaire sur un corps p -adique, *Invent. math.* **159** (2005) 589–606.
- [3] J.-L. Colliot-Thélène et A. Pirutka, Hypersurfaces quartiques de dimension 3 : non rationalité stable, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (2)* **49** (2016) 373–399.
- [4] B. Hassett, Cubic fourfolds, $K3$ -surfaces and rationality questions, lecture notes for a 2015 CIME-CIRM summer school, <https://arxiv.org/abs/1601.05501v2>
- [5] A. Pirutka, Varieties that are not stably rational, zero-cycles and unramified cohomology, Proceedings of the 2015 Utah AMS Algebraic Geometry Conference.
- [6] T. Shioda et T. Katsura, On Fermat varieties. *Tôhoku Math. J. (2)* **31** (1979), no. 1, 97–115.
- [7] C. Voisin, On the universal CH_0 -group of cubic hypersurfaces, à paraître dans *JEMS*. <http://arxiv.org/abs/1407.7261v2>

J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, Univ. Paris-Sud, CNRS,
Université Paris-Saclay, 91405 Orsay, France • *E-mail* : jlct@math.u-psud.fr