Formulaire chaînes de Markov

Cours de référence : MAP 432.

Définitions

Espace d'état :
espace E que l'on supposera ici fini ou dénombrable, typiquement $\{1,\ldots,d\}$ ou $\{1,2,\ldots\}$.

Noyau de Markov :
$Q: \; E\times E\to[0,1]$ tel que

$$\sum_{j\in E} Q(i,j)=1 \quad \text{pour tout } i\in \mathbf{E}.$$

Chaîne de Markov de noyau Q :
Suite $(X_0,X_1,X_2,\ldots)$ de variables aléatoires à valeurs dans E telle que

$$\mathbf{P}(X_{n+1}=j_{n+1}|X_0=j_0,\ldots,X_n=j_n)=Q(j_n,j_{n+1})$$

pour tout $n\in\mathbb{N}$, et $j_0,\ldots,j_{n+1}\in E$ tels que $\mathbf{P}(X_0=j_0,\ldots,X_n=j_n)>0$.

Remarques

1- Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $i,j\in E$: $\mathbf{P}(X_{n+1}=j|X_n=i)=Q(i,j)$.

2- Propriété de Markov : On note $\mathcal{F}_n=\sigma(X_0,\ldots,X_n)$. Pour toute fonction mesurable ϕ : $E^{\mathbb{N}}\to\mathbb{R}$ positive ou bornée

$$\mathbf{E}(\phi(X_n,X_{n+1},\ldots)|\mathcal{F}_n)=\mathbf{E}(\phi(X_n,X_{n+1},\ldots)|X_n)=h(X_n)$$

où $h(i)=\mathbf{E}_i(\phi(X_0,X_1,\ldots))$ avec $\mathbf{P}_i(\cdot):=\mathbf{P}(\cdot|X_0=i)$. Autrement dit, conditionnellement à $X_n=i$ la chaîne $(X_n,X_{n+1},\ldots)$ a même loi que $(X_0,X_1,\ldots)$ issue de i. En particulier, *l'évolution future de la chaine ne dépend du passé qu'à travers la valeur présente.*

Preuve:
1-

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(X_{n+1}=j|X_n=i)\\
&= \sum_{i_0,\ldots,i_{n-1}\in E} \mathbf{P}(X_{n+1}=j|X_0=i_0,\ldots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i)\mathbf{P}(X_0=i_0,\ldots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i|X_n=i)\\
&= \sum_{i_0,\ldots,i_{n-1}\in E} Q(i,j)\,\mathbf{P}(X_0=i_0,\ldots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i|X_n=i)\\
&= Q(i,j)
\end{aligned}$$

2- Pour simplifier, considérons $\phi(x_0, x_1, \ldots) = g(x_1)$. Le cas général se traite de la même manière.
On a $\mathbf{E}(g(X_{n+1})|\mathcal{F}_n) = H(X_0, \ldots, X_n)$ où

$$\begin{aligned} H(j_0, \ldots, j_n) &= \mathbf{E}(g(X_{n+1})|X_0 = j_0, \ldots, X_n = j_n) \\ &= \sum_{j \in E} g(j)\mathbf{P}(X_{n+1} = j|X_0 = j_0, \ldots, X_n = j_n) \\ &= \sum_{j \in E} g(j)Q(j_n, j) \\ &= \mathbf{E}_{j_n}(g(X_1)) = h(j_n) \quad \text{vu la remarque 1.} \end{aligned}$$

Enfin $\mathbf{E}(g(X_{n+1})|X_n) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(g(X_{n+1})|\mathcal{F}_n)|X_n) = \mathbf{E}(h(X_n)|X_n) = h(X_n)$. □

Formules

On note Q la "matrice" d'entrées $Q_{i,j} = Q(i,j)$.

1- $\mathbf{P}_i(X_n = j) = (Q^n)_{i,j}$ où $(PQ)_{i,j} = \sum_{k \in E} P_{i,k} Q_{k,j}$

2- Si $\pi_i = \mathbf{P}(X_0 = i)$ pour tout $i \in E$ et $f : E \to \mathbb{R}$ mesurable positive ou bornée

$$\mathbf{E}_\pi(f(X_n)) = \pi^T Q^n f$$

où $f_i = f(i)$.

3- $\mathbf{E}_\pi(f(X_{n+1})|\mathcal{F}_n)(\omega) = (Qf)_{X_n(\omega)}$.

Preuve:
1- pour $n = 1$ c'est la remarque 1 ci-dessus. Pour $n = 2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_i(X_2 = j) &= \sum_{k \in E} \mathbf{P}(X_2 = j|X_0 = i, X_1 = k)\mathbf{P}_i(X_1 = k) \\ &= \sum_{k \in E} Q(k,j)Q(i,k) \\ &= (Q^2)_{i,j}. \end{aligned}$$

Une récurrence permet de conclure.
2,3- Le 2- découle directement du 1- et le 3- s'obtient grâce à la propriéré de Markov + le 2- □

Markov fort

Temps d'arrêt :
- Une variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ est un temps d'arrêt si $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$ pour tout n.
- On note $\mathcal{F}_T = \{$évènements A tels que $A \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n\}$ = information disponible au temps T.

Propriété de Markov forte

Pour toute fonction mesurable $\phi : E^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ positive ou bornée et tout temps d'arrêt T

$$\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}\mathbf{E}(\phi(X_T, X_{T+1}, \ldots)|\mathcal{F}_T) = \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}\, h(X_T)$$

où $h(i) = \mathbf{E}_i(\phi(X_0, X_1, \ldots))$.

En particulier, conditionnellement à $T < \infty$ et $X_T = j$, la chaîne $(X_T, X_{T+1}, \ldots)$ a même loi que $(X_0, X_1, \ldots)$ issue de j.

Preuve: On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}\mathbf{E}(\phi(X_T, X_{T+1}, \ldots)|\mathcal{F}_T) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{T=n\}}\mathbf{E}(\phi(X_T, X_{T+1}, \ldots)|\mathcal{F}_n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{1}_{\{T=n\}}\phi(X_n, X_{n+1}, \ldots)|\mathcal{F}_n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{T=n\}}h(X_n) = h(X_T).
\end{aligned}$$

La première égalité est non-triviale (mais vraie !), la seconde égalité est vraie car $\{T = n\}$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable et la dernière égalité est la propriété de Markov. □

Probabilités stationnaires

Question : existe-t-il ν telle que la loi de X_n converge vers ν. Si ν existe alors on a $(\pi^T Q^n)_i \to \nu_i$ pour tout $i \in E$. Or on a aussi $(\pi^T Q^{n-1})_i \to \nu_i$ donc $(\pi^T Q^n)_i \to (\nu^T Q)_i$ et $\nu^T Q = \nu$. On voit que si ν existe elle est invariante par Q.

Loi invariante :

Une probabilité ν sur E est invariante si

$$\nu(j) = \sum_{i\in E} \nu(i)Q(i,j) \quad \text{pour tout } j \in E.$$

Remarque

Si ν est invariante alors $\nu^T Q^n = \nu^T$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cela signifie que si la loi de X_0 est ν alors la loi de X_n est aussi ν pour tout temps n. On dit que ν est une loi stationnaire.

Existence d'une probabilité invariante :

Pour $j \in E$, on note T_j le premier temps de passage en j.

- **Irreductible :** la chaine est dite irreductible si $\mathbf{P}_i(T_j < +\infty) > 0$ pour tout $i, j \in E$
- **Récurrente positive :** la chaine est dite récurrente positive si $\mathbf{E}_i(T_i) < +\infty$ pour tout $i \in E$.
- **Existence :** si (X_n) est irréductible et récurrente positive alors il existe une unique probabilité invariante ν.