M1- Mathématiques Appliquées - ENSTA / Paris-Sud
Modélisation statistique (MAP-STA201), 2018-2019
christine.keribin@math.u-psud.fr
Chargés de TD: Baptiste Broto, Timothée Mathieu, Thomas Lehéricy

Semaine 4: Test de Wald et du RV

Eléments de corrigé

Objectifs:

- Construire un test de Wald, un test du rapport de vraisemblance.
- Construire un intervalle de confiance.
- Utiliser la méthode delta à bon escient.

1 Test de Wald

Soit un modèle paramétrique régulier P_θ avec $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)^T \in \mathbb{R}^4$. On dispose d'un n-échantillon iid. Construire un test de Wald pour chacun des cas suivants:

1. $(H_0) : \theta_3 = \theta_1$ contre l'alternative $(H_1) : \theta_3 \neq \theta_1$.

   Correction. *L'EMV régulier a un comportement asymptotiquement normal* $\sqrt{n}(\widehat{\theta} - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, V_1)$ *où* $V_1 = -[\mathbb{E}_\theta(\nabla^2_\theta \log(f(x_1, \theta))]^{-1}$ *est l'inverse de l'information de Fisher d'une observation de l'échantillon.*

   Soit $A = (-1, 0, 1, 0)$. *On teste* $A\theta = 0$ *contre* $A\theta \neq 0$.

   La statistique de Wald $W = ||\sqrt{n}(AV_1A')^{-1/2}A\widehat{\theta}||^2 = ||T_n||^2$ *est de loi asymptotique (et donc approchée à distance finie)* $\chi^2(1)$ *sous* (H_0). *On a* $AV_1A' = V_{11} - 2V_{13} + V_{33}$.

   V_1 *n'est en général pas connue car elle peut dépendre des paramètres. On peut l'estimer en utilisant l'inverse du Hessien correctement normalisé*

   $$\widehat{V}_1 = [\sum_i \nabla^2_\theta \log(f(X_i, \widehat{\theta})/n]^{-1}$$

   ou par $\widehat{V}_1 = I_1(\widehat{\theta})$.

   D'où l'estimation de la variance de $\sqrt{n}A\widehat{\theta}$ *est* $A\widehat{V}_1A' = \widehat{V}_{11} - 2\widehat{V}_{12} + \widehat{V}_{33}$ *qui tend en probabilité vers* AV_1A'. *D'où* $W = ||\sqrt{n}(A\widehat{V}_1A')^{-1/2}A\widehat{\theta}||^2$ *suit asymptotiquement une loi du* $\chi^2(1)$ *par Slutsky. La région de rejet s'en déduit* $\mathcal{R} = \{W > q_{1-\alpha}^{\chi^2(1)}\}$ *de niveau* $\mathbb{P}_{(H_0)}(\mathcal{R}) \simeq \alpha$ *tendant asymptotiquement vers* α.

2. $(H_0) : \theta_3 = \theta_1$ contre l'alternative $(H_1) : \theta_3 > \theta_1$.

   Correction. *Même raisonnement mais on prend directement la statistique*

   $$T = \sqrt{n}(AV_1A')^{-1/2}A\widehat{\theta}$$

   qui est de loi asymptotique (et donc approchée à distance finie) $\mathcal{N}(0, 1)$ *sous* (H_0). *On a* $AV_1A' = V_{11} - 2V_{13} + V_{33}$ *et on estime la variance comme dans la question précédente*

   D'où $T_n = \sqrt{n}(A\widehat{V}_1A')^{-1/2}A\widehat{\theta}$ *suit asymptotiquement une loi du* $\mathcal{N}(0, 1)$ *par Slutsky. La région de rejet s'en déduit* $\mathcal{R} = \{T_n > q^*_{1-\alpha}\}$ *de niveau* $\mathbb{P}_{(H_0)}(\mathcal{R}) \simeq \alpha$ *tendant asymptotiquement vers* α.

3. $(H_0) : (\theta_3)^2 = \theta_1$ contre l'alternative $(H_1) : (\theta_3)^2 > \theta_1$.

   Correction. *Soit $h(\theta) = (\theta_3)^2 - \theta_1$. On teste $h(\theta) = 0$ contre $h(\theta) > 0$. Par la delta-méthode, sous (H_0),*

   $$\sqrt{n}(h(\widehat{\theta}) - h(\theta)) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, Dh(\theta)V_1 Dh(\theta)'), \text{ avec } A = Dh(\theta) = (-1 \;\; 0 \;\; 2\theta_3 \;\; 0).$$

   Même raisonnement que dans la question 1 avec $W = \sqrt{n}(\widehat{A}\widehat{V}_1\widehat{A}')^{-1/2}h(\widehat{\theta})$ où $\widehat{A} = Dh(\widehat{\theta})$ et $AV_1A' = V_{11} - 4V_{13} + 4V_{33}$ D'où $\mathcal{R} = \{W > q^*_{1-\alpha}\}$ de niveau asymptotique α. Le niveau est approché à distance finie.

4. $(H_0) : (\theta_3)^2 = \theta_1$ et $\theta_3 = \theta_2$ contre l'alternative $(H_1) : (\theta_3)^2 \neq \theta_1$ ou $\theta_3 \neq \theta_2$.

   Correction. *Même principe avec*

   $$h(\theta) = \begin{pmatrix} \theta_3^2 - \theta_1 \\ \theta_2 - \theta_3 \end{pmatrix} \text{ et } A = Dh(\theta) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2\theta_3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Sous (H_0), $W = h(\widehat{\theta})'(\widehat{A}\widehat{V}_n\widehat{A})')^{-1}h(\widehat{\theta}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi^2_{(2)}$, d'où $\mathcal{R} = \{W > q^{\chi^2(2)}_{1-\alpha}\}$

2 Une alternative à la méthode delta

On considère un échantillon iid d'une loi de Bernoulli de paramètre p.

1. Déterminer la loi asymptotique de l'estimateur du maximum de vraisemblance de la cote $\eta = p/(1-p)$

   Correction. *L'emv de p est asymptotiquement normal ou par la propriété de l'emv, ou par le TCL)*

   $$\sqrt{n}(\widehat{p} - p) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, p(1-p))$$

   En utilisant la méthode delta avec $h(p) = p/(1-p)$ et $\dot{h}(p) = 1/(1-p)^2$

   $$\sqrt{n}(h(\widehat{p}) - h(p)) = \sqrt{n}(\widehat{\nu} - \nu) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, p/(1-p)^3)$$

2. Déterminer un IC de la cote:

   (a) en utilisant la loi limite de $\widehat{\nu}$

   Correction. *La variance de la loi limite de $\widehat{\eta}$ dépendant du paramètre inconnu, on peut l'estimer par $\widehat{p}/(1-\widehat{p})^3$ qui est consistant, et le théorème de Slutsky permet d'écrire*

   $$\sqrt{n}\frac{\widehat{\eta} - \eta}{\sqrt{\frac{\widehat{p}}{(1-\widehat{p})^3}}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

   d'où, avec $q^*_{1-\alpha/2}$ le quantile d'ordre $1-\alpha/2$ d'une loi gaussienne centrée réduite, l'intervalle de confiance

   $$IC_n(\eta) = \left[\widehat{\eta} - q^*_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{n}\frac{\widehat{p}}{(1-\widehat{p})^3}};\; \widehat{\eta} + q^*_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{n}\frac{\widehat{p}}{(1-\widehat{p})^3}}\right]$$

   de niveau asymptotique $\alpha = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(IC_n(\eta) \ni \eta)$.

(b) en utilisant la monotonie de la cote en fonction de p.
Commenter.

Correction. *Un IC asymptotique de p est*

$$IC_n(p) = \left[\widehat{p} - q^*_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}};\ \ \widehat{p} + q^*_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}\right]$$

La fonction $h(p)$ est strictement monotone en p (décroissante) d'où

$$\tilde{IC}_n(h(p)) = \left[h\left(\widehat{p} + q^*_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}\right);\ \ h\left(\widehat{p} - q^*_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}\right)\right]$$

Cet intervalle n'est pas symétrique, mais il assure positivité de la borne inférieure, ce qui n'est pas le cas de l'intervalle construit avec la méthode delta. Il permet de plus de ne pas faire une double approximation (l'une pour la loi limite de l'emv, l'autre pour la méthode delta).

3 Différence de deux espérances

On observe deux échantillons gaussiens indépendants d'espérance $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma^2)$ de taille n_1 et $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma^2)$ de taille n_2.

1. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\theta} = (\widehat{\mu}_1, \widehat{\mu}_2, \widehat{\sigma}^2)$.

   Correction. *On résout les équations de vraisemblance et on trouve*

   $$\widehat{\mu}_1 = \bar{X} = \sum_i X_i/n_1;\ \ \widehat{\mu}_2 = \bar{Y} = \sum_j Y_j/n_2;\ \ \widehat{\sigma}^2 = (\sum_i (X_i - \bar{X})^2 + \sum_j (Y_j - \bar{Y})^2)/(n_1+n_2)$$

   La matrice d'info de Fisher de l'échantillon est vaut $diag(n_1/\sigma^2, n_2/\sigma^2, (n_1+n_2)/(2\sigma^4))$.
   La matrice de normalisation V_n de $(\widehat{\mu}_1, \widehat{\mu}_2)$ est donc diagonale

   $$V_n(\theta) = diag\left(\sigma^2/n_1\ \sigma^2/n_2\right)$$

   C'est même ici la matrice de variance exacte, car X et Y sont indépendants.

2. Pour tester $(H_0) : \mu_1 = \mu_2$ contre $(H_1) : \mu_1 \neq \mu_2$

   (a) Construire le test de Wald

   Correction. *Soit $A = (1\ \ -1\ \ 0)$. La statistique de Wald $A(\widehat{\theta} - \theta)$ est (approximativement) gaussienne de variance $AV_nA' = (1/n_1 + 1/n_2)\sigma^2$. Comme σ^2 n'est pas connu, on peut l'estimer par $\widehat{\sigma}^2$ et $A(\widehat{\theta} - \theta)/\sqrt{(1/n_1 + 1/n_2)\widehat{\sigma}^2} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$, d'où $\mathcal{R} = \{|T_n| > q^*_{1-\alpha/2}\}$.*
   Mais on peut aussi définir une statistique de test qui permet un niveau exact. En effet, dans le modèle gaussien $\widehat{\mu}_1$ et $\widehat{\mu}_2$ sont indépendants de $\widehat{\sigma}^2$, et $(n_1 + n_2)\widehat{\sigma}^2 \sim \sigma^2\chi^2_{(n_1+n_2-2)}$. Soit $S_n^2 = (n_1 + n_2)\widehat{\sigma}^2/(n_1 + n_2 - 2)$ et $\tilde{T}_n = (\widehat{\mu}_1 - \widehat{\mu}_2)/(S_n\sqrt{1/n_1 + 1/n_2})$ D'où $\tilde{\mathcal{R}} = \{|\tilde{T}_n| > qt_{1-\alpha/2, n_1+n_2-2}\}$ est la région de rejet du test classique de niveau exact α.

christine.keribin@math.u-psud.fr
Chargés de TD: Baptiste Broto, Timothée Mathieu, Thomas Lehéricy

(b) Construire le test du rapport de vraisemblance.

Correction. *Soit* $SCR(H_1) = \sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \bar{X})^2 + \sum_{j=1}^{n_2}(Y_j - \bar{Y})^2$ *et soit* $SCR(H_0) = \sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \widehat{\mu})^2 + \sum_{j=1}^{n_2}(Y_i - \widehat{\mu})^2$ *avec* $\widehat{\mu} = (n_1\bar{X} + n_2\bar{Y})/(n_1 + n_2)$.

Il faut calculer la log-vraisemblance maximale dans le modèle (H_1) *(et on utilise l'emv calculé à la première question), et la log-vraisemblance maximale dans le modèle* (H_0) *(ie. l'emv de* μ *la valeur commune de l'espérance, et celui de la variance, qui vaut* $\widehat{\sigma}^2_{(H_0)}) = SCR(H_0)/n$*).*

Alors, lorsque l'échantillon est généré sous (H_0)

$$LTRV = 2\log\left(\frac{L(x, \widehat{\mu}_{(H_1)}, \widehat{\sigma}^2_n)}{L(x, \widehat{\mu}_{(H_0)}, \widehat{\sigma}^2_{(H_0)})}\right) = (n_1 + n_2)\log\left(\frac{SCR(H_0)}{SCR(H_1)}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi^2(1)$$

D'où la région de rejet $\{LTRV > q_{\chi^2(1)}(1-\alpha\})$ *de niveau approché* α.

(c) Comparer ces deux tests, et comparer avec le test usuel

Correction. *On peut écrire* $LTRV = (n_1 + n_2)\log\left(1 + \frac{SCR(H_0) - SCR(H_1)}{SCR(H_1)}\right)$ *avec*

$$SCM = SCR(H_0) - SCR(H_1) = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}(\bar{X} - \bar{Y})^2$$

Sous (H_0)*, quand* n_1 *et* n_2 *tendent vers l'infini, un développement limité donne*

$$LTRV = \frac{SCM}{SCR(H_1)/(n_1 + n_2)} + o_P(1) = T_n^2 + o_P(1) \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi^2(1)$$

on retrouve le test de Wald asymptotique. Et en considérant directement la région $\{2\log(1 + SCM/SCR(H_1)) > k_\alpha\} = \{\tilde{T}_n^2 = \frac{SCM}{SCR(H_1)/(n_1+n_2-2)} > \tilde{k}_\alpha\} = \tilde{\mathcal{R}}$ *où* $\tilde{T}_n^2 \sim \mathcal{F}(1, n_1 + n_2 - 2)$*, on retrouve le test de Wald exact qui est le test usuel.*