Cours accéléré Statistiques
Partie 3: Introduction à la statistique bayésienne

Master 2 Mathématiques et Applications

Christine Keribin

[1]Laboratoire de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay

2024-2025

université PARIS-SACLAY

FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY

Bibliographie

C. P. Robert.
Le choix bayésien
Springer, 2006.

J-M. Marin et C. P. Robert.
Bayesian Essentials with R.
Springer, 2014.

Statistique

- Résoudre un problème inverse : déterminer le paramètre θ du mécanisme probabiliste générateur
- en proba, on est conditionnel à θ : densité

$$x \mapsto f_\theta(x) = f(x|\theta)$$

- en stat, on est conditionnel aux observations x : vraisemblance

$$\theta \mapsto L(\theta; x) = L(\theta|x) = f_\theta(x)$$

Vision fréquentiste - vision bayésienne

- vision fréquentiste :
  - θ est estimé par $\widehat{\theta}$ avec une certaine incertitude car l'échantillon X est fini
  - on évalue en moyenne
- vision bayésienne :
  - modéliser l'incertitude sur θ par une loi de probabilité a priori $\pi(\theta)$
  - l'inférence bayésienne consiste à déterminer la loi a posteriori $\pi(\theta|X = x)$

Théorème (Bayes)

Si A et E sont deux événements tels que $\mathbb{P}(E) \neq 0$, alors

$$\mathbb{P}(A|E) = \frac{\mathbb{P}(A \cap E)}{\mathbb{P}(E)} = \frac{\mathbb{P}(E|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(E)}$$

Version continue du théorème de Bayes

Théorème (Bayes (1763))

Soient X et Y deux variables de loi jointe de densité $\varphi(x, y)$, de densité conditionnelle $f(x|y)$ et de densité marginale $g(y) = \int \varphi(x, y)\, dx$,

$$g(y|x) = \frac{f(x|y)g(y)}{\int f(x|y)g(y)\, dy}$$

Application :

$$\pi(\theta|x) = \frac{f(x|\theta)\pi(\theta)}{\int f(x|\theta)\pi(\theta)\, d\theta} = \frac{L(\theta; x)\pi(\theta)}{m(x)}$$

où $m(x)$ est appelé vraisemblance intégrée : constante de normalisation de la loi a posteriori

Modèle statistique bayésien

Définition

Un modèle statistique bayésien est constitué d'un modèle statistique paramétrique $f(x|\theta)$ et d'une distribution a priori pour le paramètre $\pi(\theta)$.

- Le théorème de Bayes actualise l'information sur la loi de θ en "extrayant" celle contenue dans l'observation x
- novateur : paramètre inconnu $\rightarrow$ paramètre aléatoire

Exemple $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\mu \sim \mathcal{N}(\mu_0, \tau^2)$

Intérêts

- petits échantillons
- remplace une maximisation par une intégration
  $\hookrightarrow$ rend les estimateurs plus stables
- connaissance experte du domaine

Choix de la loi a priori $\pi(\theta)$

l'utilisation d'une loi sur θ permet de résumer l'information disponible sur θ et l'incorporation de cette information inexacte dans le processus de décision

Choix en fonction

- de ce qu'on en connait avant l'observation ou pas (prior non informatif)
- de considérations pratiques (faisabilité de calculs,)

Décision fréquentiste

Soit $\ell(\theta, \delta)$ une fonction de perte, et $\delta(x)$ un estimateur de $\theta \in \mathbb{R}^p$

Le risque fréquentiste est défini par $R(\theta, \delta) = \mathbb{E}_\theta[\ell(\theta, \delta(X))]$

- en fq, les estimateurs sont évalués suivant leur performance à long terme (en moyenne) pour toutes les valeurs possibles du paramètre θ
- mais ce n'est pas forcément optimal pour les valeurs observées sur l'échantillon
- difficultés à avoir des performances uniformément meilleures
- dépend de θ inconnu

$\hookrightarrow$: idée bayésienne : intégrer sur l'espace des paramètres pour pallier les difficultés du risque fréquentiste

Décision bayésienne

Soit $\ell(\theta, \delta)$ une fonction de perte, et π une loi a priori,

Définition

Le coût moyen a posteriori ou risque a posteriori est défini par

$$\rho(\pi, \delta|X) = \mathbb{E}^{\pi}[\ell(\theta, \delta(X))|X]$$

$\hookrightarrow$ Le problème change suivant les données (qui sont connues)...

Définition

Le risque intégré est défini par

$$r(\pi, \delta) = \mathbb{E}^{\pi}[R(\theta, \delta)]$$

où $R(\theta, \delta) = \mathbb{E}_{\theta}[\ell(\theta, \delta(X))]$ *est le risque (fréquentiste)*

$\hookrightarrow$ on associe un nombre réel à chaque estimateur : ordre total sur les estimateurs

Estimateur de Bayes

Définition

Un estimateur de Bayes associé à une loi a priori π et une fonction de coût ℓ est un estimateur δ^π minimisant le risque intégré $r(\pi, \delta)$
$r(\pi) = r(\pi, \delta^\pi)$ est appelé risque de Bayes

Théorème (Méthode de calcul de l'estimateur de Bayes)

S'il existe une décision δ de risque intégré fini $r(\pi, \delta) < \infty$ et si

$$\forall x \in \mathcal{X}, \quad \delta^\pi(x) = \text{Arg}\min_\delta \rho(\pi, \delta | x)$$

alors $\delta^\pi(X)$ est un estimateur bayésien.

Exemples

Théorème
L'estimateur de Bayes associé à la loi a priori π et au coût quadratique : $\ell(\theta, \delta) = ||\theta - \delta||^2$ est la moyenne a posteriori

Théorème
L'estimateur de Bayes associé à la loi a priori π et à la perte L^1 : $\ell(\theta, \delta) = |\theta - \delta|$ est la médiane a posteriori

Autre cas : décision binaire et perte $0 - 1$

Admissibilité

Théorème

Soit δ^π un estimateur bayésien associé à la loi a priori π

- *S'il est unique, alors il est admissible*
- *S'il est de risque de Bayes fini, alors il est admissible*

Exemple : Soit $S = \sum X_i$ le nombre de pièces non conformes après n tirages (avec remise). La proportion θ de pièces non conformes est inconnue. Étant donné S, que peut-on dire sur θ ?

$X_i \sim \mathcal{B}(1, \theta)$, $\theta \sim \mathcal{U}[0, 1]$

[rappel Loi Beta : $Y \sim \mathcal{B}e(\alpha, \beta)$

$$f(y) = \frac{y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)} \mathbb{1}_{[0,1]}(y) \quad \text{avec } B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

$\mathbb{E}(Y) = \alpha/(\alpha+\beta)$, $\text{Var}(Y) = \alpha\beta/[(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)]$,

Mode$=(\alpha-1)/(\alpha+\beta-2)$]

Maximum a posteriori

- On utilise parfois l'estimateur du maximum de la loi a posteriori

$$\widehat{\theta}_{MAP} = \text{Arg}\max_{\theta} \pi(\theta|x) = \text{Arg}\max_{\theta} \pi(\theta)L(\theta; x)$$

  mais l'optimisation est souvent non triviale
- on peut voir la similarité avec l'EMV quand n tend vers l'infini, où le MAP en retrouve les propriétés

Lois a priori

Choix fondamental, car peut avoir de l'influence si on a peu de données ; criticable et critiqué !

- détermination à partir de l'expérience passée
- famille de lois conjuguées

Définition

$\mathcal{F}$ est une famille conjuguée par une fonction de vraisemblance $f(x|\theta)$, si pour toute loi a priori $\pi \in \mathcal{F}$, la loi a posteriori $\pi(.|x) \in \mathcal{F}$

$\hookrightarrow$ l'information apportée par l'échantillon se traduit uniquement par un changement de paramètre

Lois conjuguées

$f(x\|\theta)$	$\pi(\theta)$	$\pi(\theta\|x)$
$\mathcal{N}(\theta,\sigma^2)$	$\mathcal{N}(\mu,\tau^2)$	$\mathcal{N}\left(\frac{\sigma^2\mu+\tau^2 x}{\sigma^2+\tau^2};\frac{\sigma^2\tau^2}{\sigma^2+\tau^2}\right)$
$\mathcal{B}(n,\theta)$	$\mathcal{B}e(\alpha,\beta)$	$\mathcal{B}e(\alpha+x,\beta+n-x)$
$\mathcal{P}(\theta)$	$\mathcal{G}(\alpha,\beta)$	$\mathcal{G}(\alpha+x,\beta+1)$
$\mathcal{N}(\mu,1/\theta)$	$\mathcal{G}(\alpha,\beta)$	$\mathcal{G}(\alpha+1/2,\beta+(\mu-x)^2/2)$

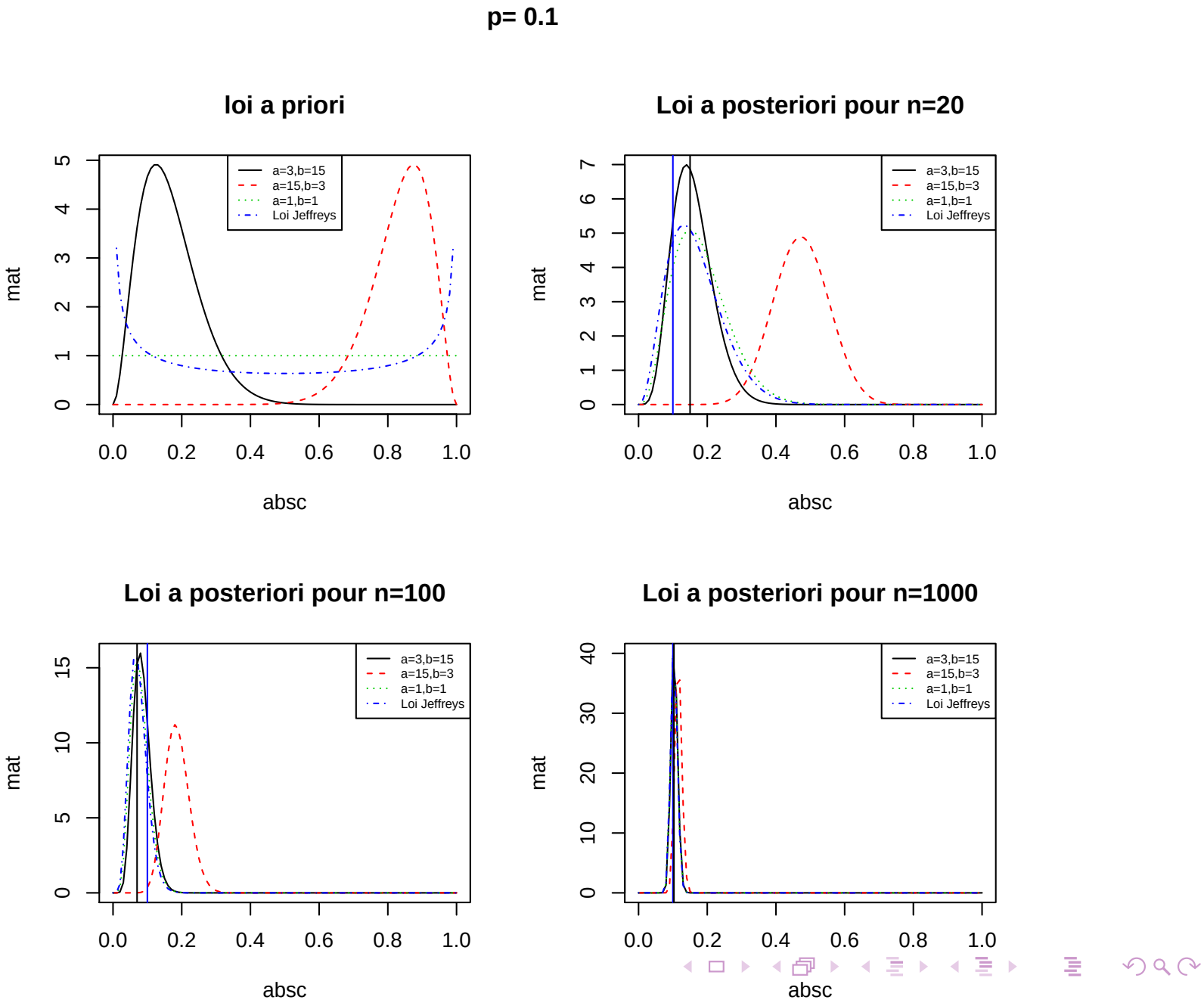
Lois non informatives

Comment choisir une loi a priori quand on n'a pas d'information ?

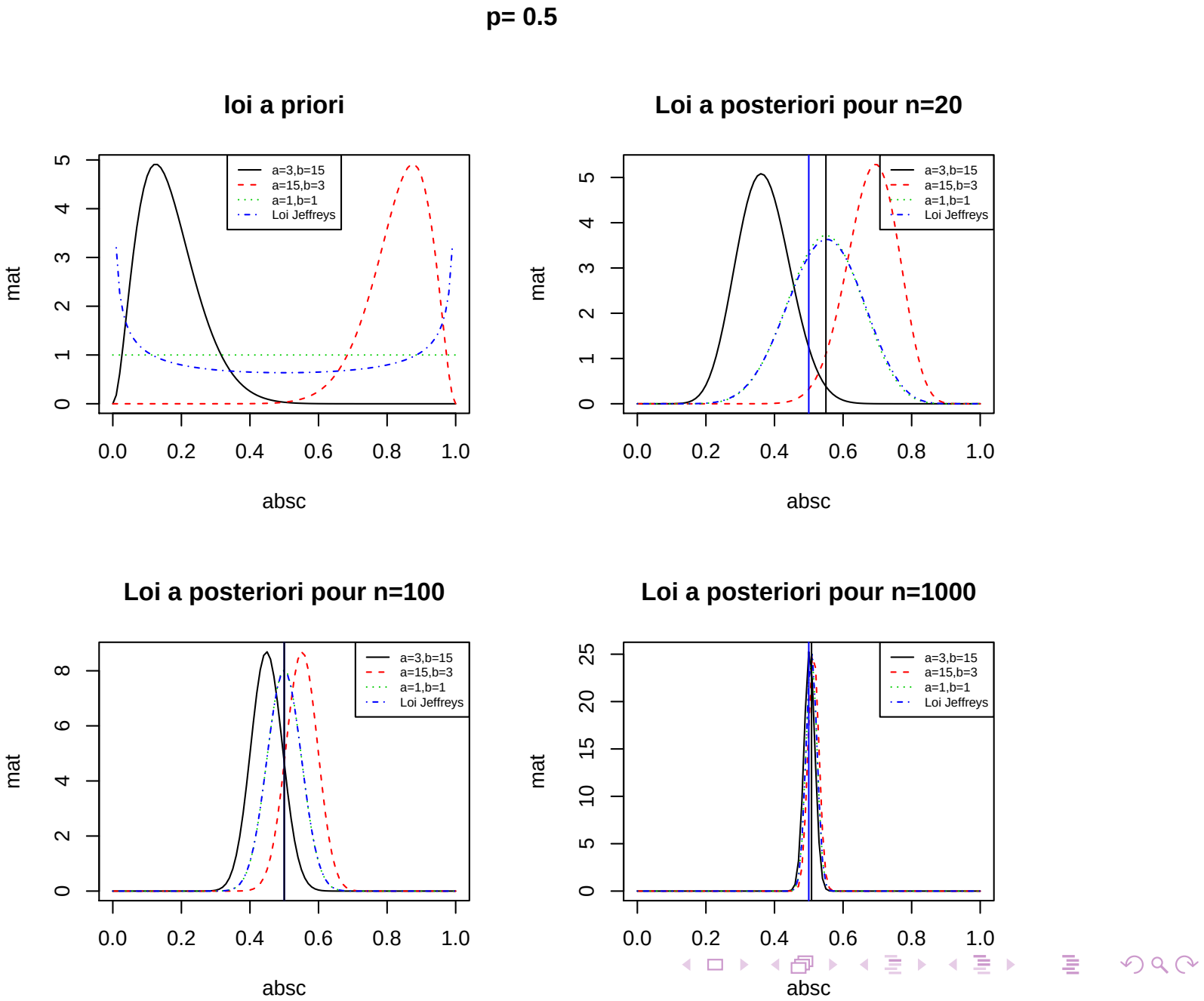
- approche de Laplace : loi uniforme
  - peut être impropre

    Rem : une loi impropre est définie comme une mesure positive, ce qui est licite tant que la vraisemblance intégrée est finie presque sûrement
  - n'est pas invariante par reparamétrisation
- approche de Jeffreys : $\pi^*(\theta) \propto [det(I(\theta))]^{1/2}$ où I est l'information de Fisher
  - est invariante par reparamétrisation

Ex : loi binomiale



Ex : loi binomiale



Intervalle de crédibilité

Définition

Un intervalle de crédibilité est un ensemble $C(x)$ de probabilité a posteriori $1-\alpha$ pour θ

$$\pi(\theta \in C(X)|X = x) = 1 - \alpha$$

Ici, θ est la variable aléatoire (alors que c'est l'IC qui est la variable aléatoire en fréquentiste).

Définition (Intervalle High Posterior Density)

Un intervalle de crédibilité HPD est un ensemble $C(x)$ de probabilité a posteriori $1-\alpha$ pour θ contenant les θ de plus haute densité. Il est de la forme

$$C(X) = \{\theta; \pi(\theta|x) \geq k_\alpha\}$$

Tests

- $(H_0) : \theta \in \Theta_0$ contre $(H_1) : \theta \notin \Theta_0$
- procédure de test : $\delta(x) = 1$ si on conserve (H_0), $\delta(x) = 0$ si on rejette (H_0)

Théorème

Si la décision est binaire : $\delta = 1$ si $\theta \in \Theta_0$; $\delta = 0$ si $\theta \in \Theta_1$ et la fonction de perte en 0-1 pondérée

$$\ell(\theta, \delta) = a_0 \mathbb{1}_{\delta=0} \mathbb{1}_{\theta \in \Theta_0} + a_1 \mathbb{1}_{\delta=1} \mathbb{1}_{\theta \in \Theta_1}$$

l'estimateur de Bayes est défini par

$$\delta(X) = 1 \text{ ssi } \mathbb{P}^\pi(\Theta_0|X) \geq \frac{a_1}{a_0} \mathbb{P}^\pi(\Theta_1|X)$$

Preuve

- $(H_0) : \theta \in \Theta_0$ contre $(H_1) : \theta \notin \Theta_0$
- procédure de test : $\delta(x) = 1$ si on conserve (H_0), $\delta(x) = 0$ si on rejette (H_0)
- $\ell(\theta, \delta) = a_0 \mathbb{1}_{\delta=0} \mathbb{1}_{\theta \in \Theta_0} + a_1 \mathbb{1}_{\delta=1} \mathbb{1}_{\theta \in \Theta_1}$

$$\rho(\pi, \delta(x)|x) = \int_\Theta \ell(\theta, \delta(x)) \pi(\theta|x) \, d\theta$$

$$= a_0 \mathbb{1}_{\delta(x)=0} \underbrace{\int_{\Theta_0} \pi(\theta|x) \, d\theta}_{\mathbb{P}^\pi(\theta \in \Theta_0|x)} + a_1 \mathbb{1}_{\delta(x)=1} \underbrace{\int_{\Theta_1} \pi(\theta|x) \, d\theta}_{\mathbb{P}^\pi(\theta \notin \Theta_0|x)}$$

à minimiser en $\delta(x)$:

- si $a_0 \mathbb{P}^\pi(\theta \in \Theta_0|x) > a_1 \mathbb{P}^\pi(\theta \notin \Theta_0|x)$ alors $\delta(x) = 1$, on accepte (H_0)
- si $a_0 \mathbb{P}^\pi(\theta \in \Theta_0|x) < a_1 \mathbb{P}^\pi(\theta \notin \Theta_0|x)$ alors $\delta(x) = 0$, on rejette (H_0)

Exemple

Tester $\theta < 0$ dans le modèle $X_1 \sim \mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$, $\theta \sim \mathcal{N}(\xi, \tau^2)$, échantillon avec une seule observation.

Le facteur de Bayes

Pour s'affranchir du poids de l'a priori :

Définition

Le facteur de Bayes est le rapport des probabilités a posteriori sur les probabilités a priori

$$\begin{aligned} B_{21}^{\pi} &= \frac{\mathbb{P}^{\pi}(\theta \in \Theta_0 | X)}{\mathbb{P}^{\pi}(\theta \in \Theta_1 | X)} \Big/ \frac{\mathbb{P}^{\pi}(\theta \in \Theta_0)}{\mathbb{P}^{\pi}(\theta \in \Theta_1)} \\ &= \frac{\int_{\Theta_0} L(\theta|x)\pi_0(\theta)\, d\theta}{\int_{\Theta_1} L(\theta|x)\pi_1(\theta)\, d\theta} = \frac{m_0(x)}{m_1(x)} \end{aligned}$$

π_0 et π_1 sont les lois a priori sous (H_0) et (H_1)
C'est un rapport de vraisemblance intégrée sur chaque espace des paramètres

Le facteur de Bayes pour le choix de modèle

Une autre vision : $\hookrightarrow$ un problème de sélection de modèle :

- $\mathcal{M} = 1 : \{\theta; \theta < 0\}$
- $\mathcal{M} = 2 : \{\theta; \theta > 0\}$

Une procédure de Bayes choisit le modèle k qui maximise la loi a posteriori $\mathbb{P}^\pi(\mathcal{M} = k|X)$

- l'a priori π est donc défini sur une collection d'indices $\{1, \ldots, K\}$, et conditionnellement à chaque modèle k, sur l'espace des paramètres correspondant Θ_k

$$\pi = \underbrace{\mathbb{P}(\mathcal{M} = 1)}_{p_1} \pi_1(\theta|\mathcal{M} = 1) + \ldots + p_K \pi_K(\theta|\mathcal{M} = K)$$

- l'a posteriori

$$\mathbb{P}^\pi(\mathcal{M} = k|X) = \frac{p_k \int L(\theta_k|x)\pi_k(\theta_k)\, d\theta_k}{\sum_j p_j \int L(\theta_j|x)\pi_j(\theta_j)\, d\theta_j}$$

Le facteur de Bayes

Définition

Le facteur de Bayes est le rapport des probabilités a posteriori sur les probabilités a priori

$$B_{21}^{\pi} = \frac{\mathbb{P}^{\pi}(\mathcal{M}=2|X)\,/\mathbb{P}^{\pi}(\mathcal{M}=1|X)}{p_2/p_1}$$
$$= \frac{\int_{\Theta_2} L(\theta_2|x)\pi_2(\theta_2)\,d\theta_2}{\int_{\Theta_1} L(\theta_1|x)\pi_1(\theta_1)\,d\theta_1} = \frac{m_2(x)}{m_1(x)}$$

C'est un rapport de vraisemblance intégrée sur l'espace des paramètres

A mettre en parallèle du rapport de vraisemblance fréquentiste

$$\frac{\max_{\theta\in\Theta_2} L(\theta;x)}{\max_{\theta\in\Theta_1} L(\theta;x)}$$

Echelle de Jeffreys

Le facteur de Bayes est un rapport de vraisemblance "bayésien". L'évidence apportée par les données est calibrée par l'échelle de Jeffreys

- si $0 < \log_{10}(B_{21}^{\pi}) \leq 0.5$, l'évidence contre $\mathcal{M}_1$ est faible
- si $0.5 < \log_{10}(B_{21}^{\pi}) \leq 1$, l'évidence contre $\mathcal{M}_1$ est substantielle
- si $1 < \log_{10}(B_{21}^{\pi}) \leq 2$, l'évidence contre $\mathcal{M}_1$ est forte
- si $\log_{10}(B_{21}^{\pi}) > 2$, l'évidence contre $\mathcal{M}_1$ est décisive

Remarque : attention à l'utilisation de lois impropres

Calcul du facteur de Bayes par simulation

- Objectif : Proposer une méthode générique pour calculer

$$I = \mathbb{E}_f[h(X)] = \int_{\mathcal{X}} h(x) f(x) dx$$

- Solution : simulation par Monte Carlo
  Utiliser un échantillon iid $(X_1, \ldots, X_n)$ de loi de densité f pour approximer l'intégrale I par la moyenne empirique

$$\widehat{h}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h(x_i)$$

  qui converge par la Loi des Grands Nombres

$$\widehat{h}_n \to \mathbb{E}_f[h(X)]$$

Précision de la méthode Monte Carlo

- La variance de l'estimation est $\mathrm{Var}(\widehat{h}_n) = \mathrm{Var}(h(X_1))/n$ estimée par

$$\widehat{v}_n := \widehat{\mathrm{Var}(\widehat{h}_n)} = \frac{1}{n}\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(h(x_i) - \widehat{h}_n)^2$$

- Asymptotiquement (n grand) et si $\mathbb{E}(h(x)^2) < \infty$

$$\frac{\widehat{h}_n - \mathbb{E}_f[h(X)]}{\sqrt{\widehat{v}_n}} \overset{appr}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$$

d'où indication de la précision de l'approximation obtenue

Importance sampling

- La simulation à partir de f (densité cible) n'est pas nécessairement de plus faible variance
- Une alternative à l'échantillonnage direct est l'échantillonnage préférentiel ou pondéré

$$\mathbb{E}_f[h(X)] = \int_{\mathcal{X}} h(x)\frac{f(x)}{g(x)}g(x)dx$$

qui permet d'utiliser une loi instrumentale g

$\hookrightarrow$ tirer là où les observations ont de l'importance

Importance Sampling

- Convergence : si $X_i \sim g$ iid, alors

$$\widehat{h}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{f(X_i)}{g(X_i)} h(X_i) \to \int_{\mathcal{X}} h(x)f(x)dx = \mathbb{E}_f[h(X)]$$

  pour n'importe quel choix de loi instrumentale g de support contenant celui de f
- choisir g facile à simuler
- l'estimateur $\widehat{h}_n$ doit avoir une variance finie :

$$\int_{\mathcal{X}} h(x)^2 f(x)^2 / g(x)dx < \infty$$

- donc g doit être à queues plus épaisses que f