ENSTA ParisTech 1ère année
Statistiques (MA101), 2017-2018
christine.keribin@math.u-psud.fr, Ennio Fedrizzi, Jade Giguelay, Cyril Marzouk, Loïc Richier, Morgan Schmitz

TD4: Méthodologie des tests

Exercice 1.
Soit $(X_1, ..., X_{25})$ un échantillon de loi gaussienne d'espérance μ inconnue et de variance $v = 100$ connue.

1. Construire un test de niveau $\alpha = 0.10$ de l'hypothèse nulle "$\mu = 0$" contre l'hypothèse alternative "$\mu = 1.5$", fondé sur la moyenne empirique, estimateur du paramètre μ.

   On observe $\overline{x} = 1$. Quelle est la décision du test?

   Quelle est l'erreur de seconde espèce du test?

2. Répondre à la question précédente si $v = 9$.

3. Comment modifier le test si l'alternative est "$\mu = -1.5$"?

4. On souhaite tester $(H_0) : \mu = 2$ contre $(H_1) : \mu < 2$. Définir la région de rejet. Calculer la puissance du test et étudier ses variations en fonction de μ, n et σ.

Correction. *1. On suit la méthodologie:*

- *Modèle* $X \sim \mathcal{N}(\mu, v\, Id_n)$, *de variance connue*
- *Hypothèses données dans l'énoncé:* $(H_0) : \mu = 0$ *contre* $(H_1) : \mu = 1.5$
- *La statistique naturelle est* $T = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{v/n}}$. *Sous* H_0, $\mu = 0$, *d'où* $T = \dfrac{\overline{X}}{2}$ *a pour loi la loi gaussienne centrée réduite.*
- *Règle de décision:* T *prend de plus grandes valeurs sous* H_1. *On propose donc la région de rejet* $\mathcal{R} = \{T > q^*_{0.9} = 1.28\}$ *de risque* $\alpha = 10\%$, *avec* $q^*_{0.9}$ *le quantile d'une loi gaussienne centrée réduite d'ordre* 0.9
- *décision: On compare la valeur observée de* T, $t^{obs} = 0.5$ *au quantile* $q^*_{0.9} = 1.28$, *et on ne rejette pas* H_0*: compte-tenu de la variabilité de l'échantillon, une valeur observée de* $\overline{X}$ *plus proche de* (H_1) *que de* H_0 *ne permet pas de rejeter* (H_0).

Le risque de deuxième espèce est $\beta = \mathbb{P}_{H_1}(T \leq 1.28) = \mathbb{P}(\frac{\overline{X}-1.5}{2} \leq \frac{2*1.28-1.5}{2}) = 0.7$. *En gardant* H_0, *le risque de se tromper est de 70%.*

2. *Si* $v = 9$ *(moins de variabilité) :* $t^{obs} = 5/3 = 1.66$*; on rejette* H_0. *Le risque de seconde espèce est* $\beta = \mathbb{P}(\frac{\overline{X}-1.5}{3/5} \leq 5/3 * (3/5 * 1.28 - 1.5)) = 0.11$. *Le test est plus puissant.*

christine.keribin@math.u-psud.fr, Ennio Fedrizzi, Jade Giguelay, Cyril Marzouk, Loïc Richier, Morgan Schmitz

3. *La région de rejet utilisée dans les questions précédentes $\{T > q^*_{0.9}\}$ est de niveau α, mais la puissance du test est alors très faible pour tester la nouvelle hypothèse (H_1), en particulier inférieure au risque de première espèce α. On dit que le test est biaisé. En effet, en notant $\mu_1 = -1.5$, on a:*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\mu_1}\left(\frac{\bar{X}-\mu_1+\mu_1-0}{2} > q^*_{0.9}\right) &= \mathbb{P}_{\mu_1}\left(\frac{\bar{X}-\mu_1}{2} > 1.28+1.5/2\right)\\ &< \mathbb{P}_{\mu_1}\left(\frac{\bar{X}-\mu_1}{2} > 1.28)\right) = \alpha = 0.1\end{aligned}$$

La région de rejet de la forme $\{T < -1.28\}$, est plus puissante que la précédente pour tester la nouvelle hypothèse alternative.

4. *La stat de test $T = (\bar{X}-2)/\sqrt{v/n}$ suit sous (H_0) une loi $\mathcal{N}(0,1)$. L'alternative est $(H_1) : \mu = \mu_1 < 2$ qui détermine le côté de la région de rejet $\mathcal{R}\{T < q^*\}$. L'alternative étant composite, la puissance $\pi(\mu_1)$ est une fonction de $\mu_1 \in]-\infty; 2[$*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\mu_1}(\mathcal{R}) &= \mathbb{P}_{\mu_1}\left(\sqrt{n}\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma} < q^*_\alpha\right)\\ &= \mathbb{P}_{\mu_1}\left(\sqrt{n}\frac{\bar{X}-\mu_1}{\sigma} < q^*_\alpha + \sqrt{n}\frac{\mu_0-\mu_1}{\sigma}\right)\\ &= F^*\left(q^*_\alpha + \sqrt{n}\frac{\mu_0-\mu_1}{\sigma}\right) = \pi(\mu_1)\end{aligned}$$

où F^* désigne la fonction de répartition de la loi gaussienne centrée réduite.

- *Quand n tend vers l'infini, la puissance tend vers 1, le test est convergent*
- *Quand $\mu_1 = \mu_0$, $\alpha = \pi(\mu_0)$ et pour tout $\mu_1 < \mu_0$, $F^*\left(q^*_\alpha + \sqrt{n}\frac{\mu_0-\mu_1}{\sigma}\right) > F^*(q^*_\alpha) = \alpha$. Le test est sans biais.*
- *quand μ_1 s'écarte de μ_0 vers les valeurs inférieure, la puissance augmente*
- *Plus σ est grand, moins le test est puissant.*

Exercice 2.
On considère un n-échantillon d'une loi gaussienne d'espérance μ inconnue et de variance σ^2 également inconnue. On souhaite tester $(H_0) : \mu = 2$ contre $(H_1) : \mu \neq 2$.

1. Construire une statistique pivotale à partir de la moyenne et la variance empiriques de l'échantillon. Quelle est sa loi sous (H_0)?

2. Construire une région de rejet de niveau α.

3. On observe $\bar{x} = 2.3$ et $v = .5$ (variance non biaisée). Quel est le résultat du test de niveau $\alpha = 5\%$ si l'échantillon de taille $n = 10$? Si l'échantillon est de taille $n = 100$?

4. Calculer la puissance du test et étudier ses variations en fonction de μ et n. Représenter graphiquement son allure.

   Montrer que pour toute valeur $\mu \neq 2$, la puissance est supérieure au niveau.

5. Montrer qu'on peut trouver un test plus puissant pour certaines valeurs de l'alternative.

Correction. *1. La statistique de Student $T_n = \sqrt{n}(\bar{X}-2)/\widehat{\sigma}$ où $\widehat{\sigma}^2$ est l'estimateur non biaisé de la variance suit sous (H_0) une loi de Student $\mathcal{T}(n-1)$. Cette loi sous (H_0) ne dépend d'aucun paramètre inconnu.*

2. On pose le test de $(H_0) : \mu = \mu_0 = 2$ contre $(H_0) : \mu \neq \mu_0 = 2$ à partir d'un échantillon gaussien à espérance et variance inconnues. La statistique de test est la statistique de Student. Le test est bilatère, la région critique est la réunion de deux régions de même probabilité, sur les grandes et les petites valeurs de la statistique de test. La statistique de Student est symétrique ses quantiles vérifient $q_{\alpha/2} = -q_{1-\alpha/2}$ La région de rejet est $\{|T_n| > qt_{1-\alpha/2}\}$ où $qt_{1-\alpha/2}$ est le quantile d'ordre $1-\alpha/2$ de $\mathcal{T}(n-1)$.

3. $n = 10$, la statistique observée $t_{obs} = (\sqrt{10/v}(\bar{x}-2) = 1.34 < q_{\mathcal{T}(10-1)}(1-\alpha/2) = 2.26$. On n'est pas dans la region de rejet. L'observation n'est pas significative pour rejeter (H_0) qu'on conserve avec un risque de seconde espèce inconnu (puisqu'on ne connaît pas précisémment l'alternative)

$n = 100$, la stat observée $t_{obs} = (\sqrt{100/v}(\bar{x}-2) = 4.24 > q_{\mathcal{T}(100-1)}(1-\alpha/2) = 1.98$. On est dans la region de rejet. L'observation est significative pour rejeter (H_0) avec un risque de première espèce $\alpha = 5\%$. On est dans le cas où le risque de la décision est maîtrisé.

4. Pour un $\mu \neq \mu_0 = 2$, le risque de seconde espèce est

$$
\begin{aligned}
\beta(\mu) &= \mathbb{P}_\mu\left(|T_n| < qt_{1-\alpha/2}\right) \\
&= \mathbb{P}_\mu\left(|\sqrt{n}\frac{\bar{X}-2}{\widehat{\sigma}}| < qt_{1-\alpha/2}\right) \\
&= \mathbb{P}_\mu\left(-qt_{1-\alpha/2} < \sqrt{n}\frac{\bar{X}-2}{\widehat{\sigma}} < qt_{1-\alpha/2}\right) \\
&= \mathbb{P}_\mu\left(-qt_{1-\alpha/2} < \underbrace{\sqrt{n}\frac{\bar{X}-\mu+(\mu-2)}{\widehat{\sigma}}}_{Z} < qt_{1-\alpha/2}\right)
\end{aligned}
$$

christine.keribin@math.u-psud.fr, Ennio Fedrizzi, Jade Giguelay, Cyril Marzouk, Loïc Richier, Morgan Schmitz

où la statistique

$$\begin{aligned} Z =& \sqrt{n}\frac{\bar{X} - \mu + (\mu - 2)}{\widehat{\sigma}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma + \sqrt{n}(\mu - 2)/\sigma}{\sqrt{\widehat{\sigma}^2/\sigma^2}} \\ \sim& \frac{\mathcal{N}(0,1) + \delta}{\sqrt{\chi^2(n-1)/(n-1)}} = \mathcal{T}(n-1, \delta = \sqrt{n}\frac{\mu - 2}{\sigma})) \end{aligned}$$

suit une loi de Student $\mathcal{T}(n-1, \delta$ à $n-1$ degrés de liberté et de facteur de décentrage $\delta = \sqrt{n}\frac{\mu-2}{\sigma}$, puisque c'est le rapport d'une gaussienne décentrée de variance 1 par la racine carrée du rapport d'une loi du Khi-deux à $n-1$ ddl divisée par son nombre de ddl, le numérateur et le dénominateur sont indépendants. La puissance est fonction de μ, σ et n qui se combinent dans le terme δ

$$\pi(\delta) = 1 - F_Z(qt_{1-\alpha/2}) + F_Z(-qt_{1-\alpha/2})$$

où F_Z est la fonction de répartition de cette loi de Student décentrée. Si $|\delta| > 0$, le décentrage entraîne le fait que les deux termes $1 - F_Z(qt_{1-\alpha/2})$ et $F_Z(-qt_{1-\alpha/2})$ n'ont pas le même sens de variation, mais pas non plus les mêmes vitesses. D'où $\pi(|\delta|)$ croit quand $|\delta|$ croit. La puissance est donc en particulier supérieure au niveau, on dit que le test est non biaisé.

Pour montrer rigoureusement ces propriétés, on étudie F_Z. En utilisant le théorème de l'espérance totale, on peut travailler conditionnellement:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\delta(Z \le q) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{Z^* + \delta \le q\sqrt{K_{n-1}/(n-1)}}\right] \\ &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{Z^* + \delta \le q\sqrt{K_{n-1}/(n-1)}} | K_{n-1}\right]\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\mathbb{P}\left[Z^* + \delta \le q\sqrt{K_{n-1}/(n-1)} | K_{n-1}\right]\right) \end{aligned}$$

où $Z^* \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $K_{n-1} \sim \chi^2(n-1)$. On commence donc par travailler conditionnellement à K_{n-1}

$$\mathbb{P}\left[Z^* + \delta \le q\sqrt{K_{n-1}/(n-1)} | K_{n-1}/(n-1) = v\right] = \mathbb{F}^*(qv - \delta)$$

avec $\mathbb{F}^*$ la fonction de répartition de $\mathcal{N}(0,1)$. D'où

$$\pi(\delta|v) = 1 - \mathbb{F}^*(qv - \delta) + \mathbb{F}^*(-qv - \delta) = \mathbb{F}^*(-qv + \delta) + \mathbb{F}^*(-qv - \delta)$$

puisque la gaussienne centrée est symétrique. Sur $\mathbb{R}^-$, $\mathbb{F}^*$ est de classe $\mathcal{C}^2$, convexe, strictement croissante, donc ses taux d'accroissement sont croissants. Posons $x := qv < 0$. Pour tout $\Delta > 0$

$$\frac{\mathbb{F}^*(x + \Delta) - \mathbb{F}^*(x)}{\Delta} > \frac{\mathbb{F}^*(x) - \mathbb{F}^*(x - \Delta)}{\Delta}$$

christine.keribin@math.u-psud.fr, Ennio Fedrizzi, Jade Giguelay, Cyril Marzouk, Loïc Richier, Morgan Schmitz

Si $\delta > 0$ *, alors*

$$\frac{\mathbb{F}^*(x+\delta) - \mathbb{F}^*(x)}{\delta} > \frac{\mathbb{F}^*(x) - \mathbb{F}^*(x-\delta)}{\delta}$$

Si $\delta < 0$ *, alors*

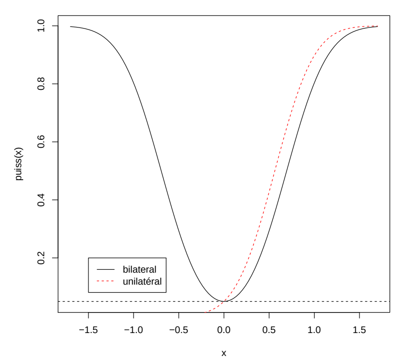
$$\frac{\mathbb{F}^*(x-\delta) - \mathbb{F}^*(x)}{-\delta} > \frac{\mathbb{F}^*(x) - \mathbb{F}^*(x+\delta)}{-\delta}$$

soit, pour tout $\delta > 0$, $\pi(\delta|v) = F^*(x+\delta) + \mathbb{F}^*(x-\delta) > 2\mathbb{F}^*(x) = 2\alpha/2 = \alpha$, *d'où en intégrant sur* v, $\pi(\delta) > \alpha$, *le test est non biaisé.*

Pour montrer la croissance en fonction de δ. *On considère d'abord le cas* $\delta > 0$, *on utilise la convexité de la fonction de répartition sur* $\mathbb{R}^-$. *Pour* $0 < \delta_1 < \delta_2$,

$$\frac{\mathbb{F}^*(x+\delta_2) - \mathbb{F}^*(x+\delta_1)}{\delta_2 - \delta_1} > \frac{\mathbb{F}^*(x+\delta_1) - \mathbb{F}^*(x-\delta_1)}{2\delta_1} > \frac{\mathbb{F}^*(x-\delta_1) - \mathbb{F}^*(x-\delta_2)}{-\delta_1 + \delta_2}$$

soit $\mathbb{F}^*(x+\delta_2) + \mathbb{F}^*(x-\delta_2) > \mathbb{F}^*(x+\delta_1) + \mathbb{F}^*(x-\delta_1)$, *la fonction est croissante quand* $\delta > 0$ *croit. Si* $\delta < 0$ *croit, il est tel que* $\Delta = |\delta|$ *décroit, et donc la fonction puissance est décroissante, cf la représentation graphique*



5. *Une région de rejet unilatérale (à droite par exemple) de nuiveau* α *est de puissance supérieure pour les* $\delta > 0$, *mais inférieure pour les* $\delta < 0$. *Aucun de ces deux tests n'est uniformément le plus puissant.*

Exercice 3.
La durée de vie de composants électroniques suit une loi exponentielle d'espérance μ définie par $f(x) = \mu^{-1}e^{-x/\mu}$ sur $\mathbb{R}^+$. On souhaite déterminer si la durée de vie moyenne des composants d'un lot est inférieure à celle annoncée dans les caractéristiques techniques nominales ($d_0 = 1600$ h), avec un faible risque de se tromper si on choisit cette décision.

christine.keribin@math.u-psud.fr, Ennio Fedrizzi, Jade Giguelay, Cyril Marzouk, Loïc Richier, Morgan Schmitz

1. Proposer une modélisation de l'expérience et poser les hypothèses.
2. Déterminer k tel que $\mathcal{R} = \{\bar{X} < k\}$ soit une région de rejet de niveau α.
3. On observe $\bar{x} = 1550$ sur 10 composants pris au hasard. Que concluez-vous? Le quantile d'ordre 0.05 d'une loi Gamma $\Gamma(1, 10)$ vaut 5.43.
4. Calculer la puissance du test.
5. Proposer une approximation de la région critique pour les grands échantillons.

Correction. *1. On tire n pièces au hasard dans le lot (si l'échantillon est très grand, on peut le faire sans remise), puis on observe la durée de vie de ces pièces. On a donc l'observation d'un n- échantillon iid de loi exponentielle d'espérance à estimer (puis tester).*

Comme on veut maîtriser le risque de dire à tort que la durée de vie est trop faible, On pose donc l'hypothèse nulle $(H_0) : \mu = d_0$ contre l'alternative (H_1) : $\mu = \mu_1 < d_0$. Si on choisit (H_1), le risque de se tromper vaut au plus α, choisi en général petit.

2. la région de rejet est de la forme $\{\bar{X} < k_\alpha\}$ ou $\{\sum_i X_i/d_0 < k'_\alpha\}$. Or, $\sum_i X_i/d_0 \sim \Gamma(1, n)$ d'où $k'_\alpha = \gamma_{n,\alpha}$, où $\gamma_{n,\alpha}$ est le quantile d'ordre α d'une loi $\Gamma(1, n)$: $\mathbb{P}(\sum_i X_i/d_0 < \gamma_{n,\alpha}) = \alpha$.

3. $\sum_i X_i/d_0 = 10 \times 1550/1600 = 9.68 > 5.42$. On n'est pas dans la région de rejet et on conserve (H_0). Les données ne sont pas significatives pour rejeter le fait que la durée de vie est moins que celle annoncée. On conserve donc l'hypothèse (H_0) la durée de vie n'est pas sous-évaluée, et on prend cette décision avec un rique de seconde espèce non maîtrisé.

4. La puissance décroit en fonction de μ_1, et augmente en fonction de n à μ_1 fixé:

$$\pi(\mu_1) = \mathbb{P}_{\mu_1}(S_n < \gamma_{n,\alpha} d_0) = \mathbb{P}_{\mu_1}\left(\frac{S_n}{\mu_1} < \frac{d_0}{\mu_1}\gamma_{n,\alpha}\right) = \mathrm{F}_{\Gamma(1,n)}\left(\frac{d_0}{\mu_1}\gamma_{n,\alpha}\right)$$

5. Si n tend vers l'infini, le TLC indique (la variance d'une loi exponentielle est égale à son espérance) le comportement asymptotique de la statistique de test sous (H_0):

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X} - d_0}{d_0} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

On en déduit la région de rejet $\{\sqrt{n}\frac{\bar{X}-d_0}{d_0} < q^*_\alpha\}$, où q^*_α est le quantile d'ordre α d'une loi gaussienne centrée réduite. La région de rejet est de niveau approximativement égal à α.
A.N.: $\sqrt{10}(1550/1600 - 1) = -0.09 > -1.64$. La décision est la même sur cet exemple, mais elle pourrait différer.

ENSTA ParisTech 1ère année
Statistiques (MA101), 2017-2018
christine.keribin@math.u-psud.fr, Ennio Fedrizzi, Jade Giguelay, Cyril Marzouk, Loïc Richier, Morgan Schmitz

Exercice 4.
A partir d'un n-échantillon gaussien iid de loi mère d'espérance μ et de variance σ^2 inconnues, on souhaite tester $\sigma = \sigma_0$ contre $\sigma > \sigma_0$.

1. Construire un test de niveau α à partir de $S = \sum_i (X_i - \bar{X})^2$
2. Tracer la courbe de puissance
3. Proposer une région de rejet de niveau α pour tester $\sigma = \sigma_0$ contre $\sigma \neq \sigma_0$

Correction.

1. *La statistique $K = S/\sigma_0^2$ suit sous (H_0) une loi du Khi-deux à $n-1$ degrés de liberté. Si l'échantillon était tiré avec une variance plus grande que σ_0^2, alors K serait en moyenne plus grande que celle attendue sous (H_0). La région de rejet est donc unilatérale à droite $\mathcal{R} = \{K > q_{\chi_{n-1}(1-\alpha)}\}$ avec $\mathbb{P}(\mathcal{R}) = \alpha$*

2. *pour $\sigma > \sigma_0$,*

$$\begin{aligned}\pi(\sigma) &= \mathbb{P}_\sigma(S/\sigma_0^2 > q_{\chi_{n-1}(1-\alpha)}) = \mathbb{P}_\sigma(S/\sigma^2 > q_{\chi_{n-1}(1-\alpha)}\sigma_0^2/\sigma^2) \\ &= 1 - F_{\chi^2_{n-1}}(q_{\chi_{n-1}(1-\alpha)}\sigma_0^2/\sigma^2))\end{aligned}$$

   qui est croissante avec σ^2 (et avec n quand σ est fixé).

3. *Dans le cas bilatère, on rejette les petites et les grandes valeurs de la statistique de test. La région de rejet est l'union de deux régions de rejet, chacune de niveau $\alpha/2$*

$$\mathcal{R} = \{S/\sigma_0^2 \leq q_{\chi_{n-1}(\alpha/2)}\} \cup \{S/\sigma_0^2 > q_{\chi_{n-1}(1-\alpha/2)}\}$$

   avec $\mathbb{P}(\mathcal{R}) = \alpha$