Université Paris-Sud
Centre d'Orsay

S3PMCP
2005-2006

Mathématiques

Examen de rattrapage d'analyse (S3PMCP) du 8 juin 2010.

Durée 3 heures.
Documents et calculatrices interdits.
barême indicatif: 4; 4; 4; 6; 2.

Exercice 1 Etudier la convergence des séries numériques de terme général:

$$u_n = \cos(\frac{\pi n^2}{2n^2 + an + 1}) \text{ avec } a > 0,$$

$$v_n = (1 - \frac{1}{n^2})^n - 1 + \frac{1}{n}.$$

Exercice 2
Discuter selon les valeurs de $\alpha \in \mathbf{R}$ la convergence de l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{|x-1|^\alpha} dx.$$

Exercice 3
1) Montrer que l'intégrale généralisée

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$$

est convergente.

2) Montrer en utilisant la formule de Taylor que:

$$|\sin(x + x^{-1}) - \sin(x)| \leq \frac{1}{|x|}, \text{ pour } |x| \geq 1.$$

3) En utilisant les points 1) et 2) montrer que l'intégrale généralisée:

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x + x^{-1})}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$$

est convergente.

Exercice 4 On considère la suite de fonctions (u_n) définies sur $]0, +\infty[$ par:

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}.$$

(1) Etudier la convergence simple, normale et uniforme de la série de fonctions $\sum u_n$.
(2) Montrer que la fonction:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$$

est définie et continue sur $]0, +\infty[$. Calculer $f(1)$.
(3) Montrer que

$$xf(x) - f(x+1) = \mathrm{e}^{-1}, \quad \forall x \in]0, +\infty[.$$

Indication: on pourra utiliser l'identité $\frac{x}{x+n} = 1 - \frac{n}{x+n}$.
(4) Montrer que

$$|f(x)| \leq \frac{\mathrm{e}}{x}.$$

Indication: on pourra majorer terme à terme la série définissant f.
(5) Montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et donner un équivalent de $f(x)$ quand $x \to +\infty$.
Indication: on pourra utiliser le point (3).
(6) Montrer que

$$|f(x) - \frac{1}{x}| \leq (\mathrm{e} - 1).$$

(7). Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 0^+$.

Exercice 5 Soit

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3}.$$

Monter la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3}$ et donner une valeur approchée de S à 10^{-3} près.