Examen de Mathématiques (S3 PMCP) n° 1

Durée 3h. Documents et calculatrices interdits

Le 17 Décembre 2007.

barême indicatif: 6 ; 5 ; 5 ; 4.

Exercice 1. Soit $\sum_{n\geq 1} f_n$ la série de fonctions définies par :

$$[0,+\infty[\ni x \mapsto f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{n}(1+nx^2)}.$$

1) Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$. On pose

$$f(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x).$$

2) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur tout intervalle $[a,b]$ pour $0 < a < b$ et en déduire que f est continue sur $]0,+\infty[$.

3) Montrer que la fonction f est dérivable sur $]0,\infty[$.

4) Montrer que pour $N \in \mathbf{N}$, $x > 0$ on a :

$$\frac{f(x)}{x} \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}(1+n^2x)}.$$

Indication : on pourra remarquer que les fonctions $\frac{f_n(x)}{x}$ *sont positives.*

On suppose que f est dérivable à droite en 0. En déduire par un passage à la limite que

$$f'(0) \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

En déduire une contradiction.

Exercice 2. Soit $\sum_{n\geq 2} f_n$ la série de fonctions définie par

$$\mathbf{R} \ni x \mapsto f_n(x) = \frac{1}{n^2+\sin(nx)}.$$

1) Monter que la série de fonctions $\sum_{n\geq 2} f_n$ converge simplement sur $\mathbf{R}$. On posera

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x).$$

2) Etudier la convergence normale de $\sum_{n\geq 2} f_n$. En déduire que la fonction f est continue sur $\mathbf{R}$.

3) Montrer que f est dérivable sur $\mathbf{R}$.

Exercice 3. Soit $\sum_{n\geq 1} f_n$ la série de fonctions définie par :

$$\mathbf{R}^+ \ni x \mapsto f_n(x) = (-1)^n \frac{x}{n^2 + x^2}.$$

1) Montrer que $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbf{R}^+$.

2) Montrer que $\sum_{n\geq 1} f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbf{R}^+$.

3) Montrer que $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $\mathbf{R}^+$.

4) Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbf{R}^+$.

Exercice 4.

1) Montrer que la suite $(\cos n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne peut pas tendre vers 0 quand $n \to \infty$.
Indication : raisonner par l'absurde et considérer la suite $\cos(2n)$.

On considère la série entière

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\cos n}{n^\alpha} z^n, \text{ pour } \alpha \in \mathbf{R}.$$

2) Montrer que si $|z| < 1$ la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos n}{n^\alpha} z^n$ converge.

3) Montrer que si $|z| > 1$ la suite $\frac{\cos n}{n^\alpha} z^n$ ne tend pas vers 0.
Indication : raisonner par l'absurde.

4) En déduire le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos n}{n^\alpha} z^n$.