Examen de rattrapage de Mathématiques S3PC

Durée 3 heures. Documents et calculatrices interdits

Le Mercredi 18 Juin 2008.

barême indicatif: 6, 8, 6.

Exercice 1. Pour $a \in \mathbf{R}$ on note par $T_a : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ l'application linéaire donnée par la matrice :

$$M_a = \begin{bmatrix} (a^2+a+1) & (a+1) \\ -(a^2+a) & -a \end{bmatrix}$$

1) Déterminer en fonction du paramètre a les valeurs propres de T_a.

2) Déterminer pour quelles valeurs de a la matrice M_a est diagonalisable.

3) On considère le système d'équations différentielles :

$$(S) \quad \begin{cases} x_1'(t) = (a^2+a+1)x_1(t) + (a+1)x_2(t) \\ x_2'(t) = -(a^2+a)x_1(t) - ax_2(t). \end{cases}$$

Déterminer toutes les solutions de (S) pour $a = 2$.

4) Déterminer toutes les solutions de (S) pour $a = 1$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la fonction de deux variables réelles définie par :

$$f(x,y) = x^3 - 3x(1+y^2).$$

1) Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}f(x,y)$ et déterminer les points critiques de f.

2) Calculer la matrice des dérivées secondes :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}(x,y)$$

et déterminer la nature des points critiques trouvés en 1).

3) On considère maintenant la restriction de la fonction f au disque unité D :

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 |\ x^2+y^2 \leqslant 1\},$$

et on note S le cercle unité :

$$S = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 |\ x^2+y^2 = 1\}.$$

On admettra que f possède un maximum M et un minimum m sur D, c'est à dire qu'il existe deux points (x_0,y_0) et (x_1,y_1) dans D tels que :

$$m = f(x_0,y_0) \leqslant f(x,y) \leqslant f(x_1,y_1) = M, \text{ pour tout } (x,y) \in D.$$

Montrer que les deux points (x_0,y_0) et (x_1,y_1) doivent appartenir à S.

Indication : on pourra raisonner par l'absurde en remarquant que si le point (x_0,y_0) ou (x_1,y_1) n'appartient pas à S, c'est un extremum local de la fonction f.

4) On déduit du point 3) que m et M sont aussi le minimum et maximum de la restriction de f au cercle unité S. En écrivant $S = \{(\cos t, \sin t)| \ t \in [0, 2\pi]\}$ et en considérant la fonction

$$g(t) = \cos^3 t - 3\cos t(1 + \sin^2 t),$$

déterminer les valeurs de m et M.

Exercice 3. Soit D le domaine de $\mathbf{R}^2$ défini par :

$$D = \{(x_1, x_2)| \ 0 \leqslant x_1 \leqslant 1, \ |x_2| \leqslant x_1(1 - x_1^2)^{\frac{1}{2}}\}.$$

1) Dessiner le domaine D.

2) On note par $\overrightarrow{\gamma}$ le bord de D, orienté par D. Montrer que l'arc paramétré :

$$[-\pi/2, \pi/2] \ni t \mapsto x(t) = (\cos t, \sin t \cos t) \in \mathbf{R}^2$$

est une paramétrisation de $\overrightarrow{\gamma}$ compatible avec son orientation.

3) On considère la forme différentielle :

$$\alpha = -x_2 dx_1.$$

Calculer

$$\int_{\overrightarrow{\gamma}} \alpha.$$

4) En utilisant le théorème de Green-Riemann calculer l'aire de D.