

Corrigé Perleil 2021

Ex 1: 1) voir le corrigé de l'exercice 4

du perleil 2020, les racines sont i et $1-i$

3) on pose $z^3 = u$, u doit être solution de $u^2 - u + (1+i) = 0$, on a donc racine

$$z^3 = i, \quad z^3 = 1+i.$$

On a si $z = e^{i\theta}$

$$z^3 = i \Leftrightarrow e^{3i\theta} = e^{i\pi/2}$$

\Leftrightarrow

$$3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{donc} \quad \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}.$$

les 3 solutions de $z^3 = i$ sont donc :

$$z = e^{i\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$

$$z = e^{i(\pi/6 + 2\pi/3)} = e^{i(\pi - \pi/6)} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$

$$z = e^{i(\pi/6 + 4\pi/3)} = e^{i(2\pi - \pi/6)} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$$

De même $1+i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$, donc les 3 solutions de

$$z^3 = 1+i \quad \text{sont}$$

$$z = \sqrt[3]{2} e^{i\pi/12}$$

$$z = \sqrt[3]{2} e^{i(\pi/12 + 2\pi/3)}$$

$$z = \sqrt[3]{2} e^{i(\pi/12 + 4\pi/3)}.$$

Exercice 2

1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 3x - 4 \neq 0\}$, on cherche les racines de $x^2 + 3x - 4$, 1 est racine évidente, l'autre est -4 ($x^2 - Sx + P$, S = somme des racines, P = produit des racines).

$$\text{Donc } D_f = \mathbb{R} \setminus \{1, -4\}.$$

2) signe de $x^2 + 3x - 4$: < 0 entre les racines, donc sur $] -4, 1[$, > 0 à l'extérieur des racines.

$$\text{Donc pour } x \in] -4, 1[\quad f(x) \geq 1 \Leftrightarrow x+1 \leq x^2 + 3x - 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 5 \geq 0 \quad \text{On étudie le signe de ce polynôme :}$$

$$\Delta = 4 + 20 = 24 \quad \text{les racines sont } -2 \pm \sqrt{6} \quad \text{donc}$$

$$-1 - \sqrt{6}, -1 + \sqrt{6}. \quad \text{On a } -2 < \sqrt{6} < 3 \quad \text{donc}$$

$$-4 < -1 - \sqrt{6} < 1 < -1 + \sqrt{6}.$$

$$\text{Donc pour } x \in] -4, 1[\quad f(x) \geq 1 \quad \text{ssi} \quad x \in] -4, -1 - \sqrt{6}]$$

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus [-4, 1]$ $f(x) \geq 1$ ssi $x^2 + 2x - 5 \leq 0$
 donc $x \in [-1-\sqrt{6}, -1+\sqrt{6}]$ et donc $x \in]1, -1+\sqrt{6}]$

Donc $f(x) \geq 1$ ssi $x \in]-4, -1-\sqrt{6}] \cup]1, -1+\sqrt{6}]$.

Exercice 3

1) $(a^n - b^n)a + b^n(a - b) = a^{n+1} - b^n a + b^n a - b = a^{n+1} - b$.

2) pour $n=1$ $a-b$ divise $a^n - b^n$.

Si $a-b$ divise $a^n - b^n$, alors $a-b$ divise $a^{n+1} - b^{n+1}$,
 en utilisant 1)

Exercice 4

Pour $p, q \in \mathbb{N}^+$ $-1 \leq \left(\frac{1}{p}\right)^q \leq \frac{1}{\frac{1}{2}}$ $0 \leq \frac{2}{q} \leq 2$, donc

$A \subset \left[-1, \frac{5}{2}\right]$, A est bornée donc admet une borne supérieure et une borne inférieure.

On détermine $\inf A$.

On suppose que $\inf A = -1$. On a vu que -1 est un minorant de A . Le suite $x_n = -1 + \frac{2}{n}$ appartient à A

($p=1, q=n$) et $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -1$, donc $\inf A = -1$

(résultat vu en cours).

On détermine $\sup A$. On suppose que $\sup A = \frac{5}{2}$.

On a vu que $\frac{5}{2}$ est un majorant de A et $\frac{5}{2} \in A$

(prendre $p=2, q=1$) donc $\frac{5}{2} = \max A$ (plus grand élément de A) = $\sup A$.

Exercice 5.

1) on dérive que $A =]0, 1]$. Si $x \in A$, $\frac{1}{n} \leq x \leq 1$
 pour un $n \in \mathbb{N}^+$ donc $x \in]0, 1]$. Si $x \in]0, 1]$, il
 existe un $n \in \mathbb{N}^+$ tel que $\frac{1}{n} < x$ (car $0 < x$) donc $x \in A$.

On a donc bien $A =]0, 1]$.

2) on dérive que $B = \{1\}$. Si $x \in B$ on a $1 \leq x \leq 1$ (

prendre $n=1$) donc $x=1$. Si $x=1$ $x \in B$ donc

$B = \{1\}$.

Exercice 6

1) $Df =]-1, 0[\cup]0, +\infty[$

On a $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + x\varepsilon(x)$ donc $\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2} + \varepsilon(x)$,

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2}$, on peut prolonger f par continuité en 0

en posant $f(0) = \frac{1}{2}$.

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x) = -\infty \text{ (pas de forme indéterminée)}$$

pour calculer la limite en $+\infty$, on écrit:

$$\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x^2} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = x \sqrt{1+\frac{1}{x^2}},$$

$$f(x) = x^2 \left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - 1 \right). \text{ On pose } x^2 = \frac{1}{t},$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+t}-1}{t} = g(t), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} g(t)$$

$$= \frac{1}{2}.$$