

---

**Partiel PCDD 101 Durée 2h.**  
Documents et calculatrices interdits  
Téléphones portables éteints et rangés dans les sacs

---

Le 27 Octobre 2022.

**Exercice 1.** 1) Donner les développements limités à l'ordre 2 en  $x = 0$  des fonctions :

$$x \mapsto e^x, \quad x \mapsto \sin x, \quad x \mapsto \frac{1}{1-x}, \quad x \mapsto \ln(1+x).$$

2) En déduire la valeur de  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  où

$$f(x) = \frac{\frac{1}{1-x} - e^x}{\sin x - \ln(1+x)}.$$

**Exercice 2.** 1) Montrer que si  $A$  et  $B$  sont deux parties de  $\mathbb{R}$  majorées, on a

$$\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B)),$$

(autrement dit, montrer que la borne supérieure de  $A \cup B$  est le plus grand des deux nombres  $\sup(A)$  et  $\sup(B)$ ).

2) On considère l'ensemble

$$A = \{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Montrer que  $A$  est majoré et minoré et déterminer sa borne supérieure et sa borne inférieure.

*Indication : écrire  $A$  comme la réunion de deux ensembles bien choisis et utiliser 1).*

**Exercice 3.** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation

$$z^2 - 3z + 3 + i = 0.$$

**Exercice 4.** 1) Calculer, en utilisant la représentation cartésienne de  $z$  les deux solutions de l'équation

$$z^2 = 1 + i.$$

2) En ensuite écrivant  $1 + i$  sous forme trigonométrique, en déduire la valeur de  $\cos(\frac{\pi}{8})$  et de  $\sin(\frac{\pi}{8})$ .

**Exercice 5.** 1) Quel est le domaine de définition de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{x}.$$

2) Calculer  $l = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ . On prolongera alors  $f$  par continuité en 0 en posant  $f(0) = l$ .

3) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $] -1, 1[$  et déterminer  $f'$ .

*indication : traiter à part la dérivabilité en  $x = 0$  en utilisant un développement limité.*