
Examen PCDD 101 Durée 2h.
Documents et calculatrices interdits
Téléphones portables éteints et rangés dans les sacs

Le 9 Janvier 2023.

Exercice 1. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $[0, 1]$ avec f' continue sur $[0, 1]$ telle que

$$f(0) = 0, f(1) = 1, f'(0) = 0, f'(1) = 0.$$

On définit la fonction $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

- 1) Montrer que g est continue sur $[0, 1]$.
- 2) Montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $g(x) \leq g(c)$ pour tout $x \in [0, 1]$.
- 3) Montrer que g est dérivable sur $]0, 1]$ et calculer la fonction g' . En déduire que $c \neq 1$. (Justifier soigneusement votre réponse).
- 4) Montrer que $c \neq 0$ et en déduire que $f'(c) = \frac{f(c)}{c}$. (Justifier soigneusement votre réponse).

Exercice 2. On considère la courbe paramétrée dans le plan définie par

$$\begin{cases} x(t) = t + \frac{4}{t}, \\ y(t) = \frac{t}{3} + 2 + \frac{3}{t+1}. \end{cases}$$

- 1) Déterminer le domaine de définition D de la fonction $t \mapsto X(t) = (x(t), y(t))$. On notera par $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ la courbe image $\gamma = \{(x(t), y(t)) : t \in D\}$.
- 2) Tracer le tableau de variation conjoint de $x(t)$ et $y(t)$.
- 3) On rappelle qu'un point singulier d'une courbe paramétrée est un point $X(t_0)$ de la courbe où t_0 est tel que $x'(t_0) = y'(t_0) = 0$.

Déterminer les tangentes horizontales, verticales, et les points singuliers de la courbe γ .

- 4) Déterminer les asymptotes à la courbe γ .
- 5) On pose $t = 2 + s$. Déterminer les développements limités à l'ordre 2 en $s = 0$ des fonctions $s \mapsto x(2 + s)$ et $s \mapsto y(2 + s)$.

En déduire la limite

$$\lim_{t \rightarrow 2} \frac{y(t) - y(2)}{x(t) - x(2)}.$$

Exercice 3. 1) Calculer l'intégrale

$$\int_0^1 e^t \sin t dt.$$

- 2) En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_1^e \sin(\ln x) dx.$$

Exercice 4. On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad x''(t) - 2x'(t) + 2x(t) = \sin t.$$

- 1) Déterminer la solution générale de l'équation homogène (H) associée.
- 2) Déterminer une solution particulière de (E) puis la solution générale de (E) .
- 3) Déterminer la solution de (E) telle que $x(0) = 1$ et $x'(0) = 0$.