
Examen de rattrapage de Math 151R
Durée 2h. Documents et calculatrices interdits.
Téléphones éteints et rangés dans les sacs.
Ecrire son nom de manière lisible sur chaque copie.
Numéroter chaque copie, ne pas la cacheter.

Le 14 Juin 2022.

Exercice 1. Dessiner les ensembles suivants :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 2x + 3\},$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2\}.$$

Exercice 2. Discuter en fonction de la valeur des paramètres a et b le nombre de points d'intersection de la droite d'équation $y = ax + b$ avec l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$.

Exercice 3. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$.

- 1) Montrer que le graphe de f admet deux tangentes parallèles à la droite d'équation $y = -3x$.
- 2) Donner l'équation cartésienne de ces deux tangentes.

Exercice 4. Soit $f :]-\frac{1}{2}, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = (1 + 2x)^{\frac{1}{2}}$.

- 1) Ecrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 en $x = 0$ pour f .
- 2) En déduire que

$$1 + x - \frac{x^2}{2} \leq f(x) \leq 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2}, \quad \forall x \in [0, +\infty[.$$

Exercice 5. Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^1 (x - 1)e^x dx.$$

Indication : intégrer par parties.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = 1 - x + 9y + x^2 + 3xy + 4y^2$.

- 1) Calculer le gradient $\vec{\nabla} f(x, y)$.
- 2) Montrer que l'ensemble des points (x, y) tels que $\vec{\nabla} f(x, y)$ est orthogonal au vecteur $(2, 1)$ est une droite D dont on donnera une équation cartésienne.