
Examen PCDD 101 Durée 2h.

Documents et calculatrices interdits

Téléphones portables éteints et rangés dans les sacs

IL EST INTERDIT D' ECRIRE AU CRAYON OU A L' ENCRE ROUGE

ECRIRE SON NOM ET SON GROUPE DE TD

de manière lisible sur chaque copie.

Numéroter chaque copie.

Le 9 Janvier 2024.

Exercice 1. On considère la courbe paramétrée γ définie par

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto M(t) = (x(t), y(t)) = (\sin(2t), \sin(3t)).$$

- 1) Montrer que pour tracer γ il suffit d' étudier $M(t)$ pour $t \in [-\pi, \pi]$.
- 2) Déterminer la relation entre $M(t)$ et $M(-t)$, puis entre $M(t)$ et $M(\pi - t)$. Expliquer comment réduire l' étude à $t \in [0, \pi/2]$.
- 3) Tracer le tableau de variation conjoint de $x(t)$ et $y(t)$ pour $t \in [0, \pi/2]$.
- 4) Déterminer les points pour $t \in [0, \pi/2]$ où la tangente à γ est horizontale ou verticale.
- 5) Tracer la courbe γ en indiquant ses symétries.

Exercice 2. 1) Montrer en utilisant le théorème des accroissements finis que

$$\frac{1}{x+1} < \ln(1+x) - \ln x < \frac{1}{x}, \quad \forall x > 0.$$

- 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(\ln(1+x) - \ln x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(1+x) - \ln x)$.
- 3) En déduire la valeur de la limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = (1+x)^{-1/3}$.

- 1) Calculer f', f'', f''' .
- 2) Montrer que

$$1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2 - \frac{14}{81}x^3 \leq (1+x)^{-1/3} \leq 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2, \quad \forall x \geq 0.$$

Exercice 4. On considère l' équation différentielle

$$(E) \quad x''(t) + 2x'(t) + 10x(t) = 7e^t.$$

- 1) Trouver la solution générale de l' équation homogène associée

$$(H) \quad x''(t) + 2x'(t) + 10x(t) = 0.$$

- 2) Trouver une solution particulière de (E) et en déduire la solution générale de (E).

3) Déterminer la solution du problème de Cauchy

$$(C) \begin{cases} x''(t) + 2x'(t) + 10x(t) = 7e^t \\ x(0) = 1, x'(0) = 0. \end{cases}$$

Exercice 5. Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^1 (2x + 1)e^x dx.$$

Indication : intégrer par parties.