
Partiel PCDD 101 Durée 2h.

Documents et calculatrices interdits

Téléphones portables éteints et rangés dans les sacs

IL EST INTERDIT D' ECRIRE AU CRAYON OU A L' ENCRE ROUGE

ECRIRE SON NOM ET SON GROUPE DE TD

de manière lisible sur chaque copie.

Numéroter chaque copie.

Le 23 Octobre 2023.

Exercice 1.

1) Montrer que pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq 1$ on a

$$0 < \frac{mn}{(m+n)^2} \leq \frac{1}{4}.$$

2) Montrer que l' ensemble $A = \left\{ \frac{mn}{(m+n)^2} : m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq 1 \right\}$ est borné.

3) Déterminer $\sup A$, $\inf A$, ainsi que $\max A$, $\min A$ si ils existent.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + x + a & \text{si } x \geq 0, \\ bx + 2 & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ sont des paramètres.

1) Tracer le graphe de f pour $a = 0$ et $b = 1$.

2) Pour quelles valeurs de a et b la fonction f est-elle continue sur \mathbb{R} ?

3) Pour quelles valeurs de a et b la fonction f est-elle dérivable sur \mathbb{R} ? On traitera séparément la dérivabilité en $x = 0$ et en $x \neq 0$.

Exercice 3. Mettre sous forme cartésienne $z = a + ib$ les nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{2 + 5i}{1 - i} + \frac{2 - 5i}{1 + i},$$

$$z_2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3.$$

Exercice 4. 1) Résoudre dans \mathbb{C} les équations

$$z^2 - (3 + 4i)z - 1 + 5i = 0.$$

2) En déduire les solutions dans \mathbb{C} de l' équation :

$$z^4 - (3 + 4i)z^2 - 1 + 5i = 0.$$

Exercice 5. 1) Montrer en utilisant un critère vu en cours que les limites

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x^{-1}) \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \sin(x^{-1})$$

n' existent pas.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin(x^{-1}) & \text{pour } x \neq 0, \\ 0 & \text{pour } x = 0. \end{cases}$$

2) Montrer que $f(x) = x^2 \epsilon(x)$ où $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0$. Quel est le développement limité de f en 0 à l'ordre 2?

3) Montrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.

4) Montrer que f est dérivable en tout point $x \neq 0$ et calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$.

5) En écrivant la dérivée comme la limite du taux d'accroissement, déterminer si f' est dérivable en $x = 0$.