

---

## Examen de rattrapage MDD251

Durée 2h. Documents et calculatrices interdits.

téléphones éteints et rangés dans les sacs.

IL EST INTERDIT D' ECRIRE AU CRAYON OU A L' ENCRE ROUGE

ECRIRE SON NOM ET SON GROUPE DE TD

de manière lisible sur chaque copie.

Numéroter chaque copie.

---

Le ??? 2025.

**Exercice 1.** On se place dans un espace métrique  $(E, d)$ .

1) Rappeller la définition de l' adhérence  $\text{Adh}(A)$  et de la frontière  $\partial A$  d' un sous ensemble  $A$  de  $E$ .

2) On se place dans  $\mathbb{R}^2$  muni de la distance usuelle. Donner des exemples d' ensembles  $A, B \subset \mathbb{R}^2$  tels que :

$$1) \quad A \cap B = \emptyset \text{ mais } \partial A \cap \partial B \neq \emptyset.$$

**Exercice 2.** On se place dans  $\mathbb{R}^2$  muni de la distance usuelle. Déterminer en justifiant votre réponse l' adhérence et l' intérieur des ensembles suivants :

$$1) \quad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y \leq 4, x \neq y\},$$

$$2) \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = x^{-1}\}.$$

**Exercice 3.** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$f(x, y) = 2y^3 + 3x^2 + 6xy.$$

1) Calculer les dérivées partielles de  $f$  et sa matrice hessienne.

2) Déterminer les points critiques de  $f$  ainsi que leur nature.

*Question bonus :*

$f$  est elle minorée, resp. majorée sur  $\mathbb{R}^2$  ? justifiez votre réponse.

**Exercice 4.** 1) Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé. Montrer que si une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $E$  converge vers  $u \in E$  pour  $\|\cdot\|_1$  alors la suite réelle  $\|u_n\|_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\|u\|$ .

2) On considère l' espace vectoriel  $E = C([0, 1]; \mathbb{R})$ , et on rappelle les normes sur  $E$  :

$$\|u\|_1 = \int_0^1 |u(x)| dx, \quad \|u\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |u(x)|.$$

Calculer  $\|x^n\|_1$  et  $\|x^n\|_\infty$ . Les normes  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_\infty$  sont-elles équivalentes sur  $E$  ?

3) On considère la suite de fonctions  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  donnée par  $u_n(x) = (n+1)x^n$ . On suppose que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers une fonction  $u \in E$  pour la norme  $\|\cdot\|_1$ .

3a) Montrer que pour tout  $r \in [0, 1[$  on a

$$\int_0^r |u(x)| dx - r^{n+1} \leq \int_0^1 |u(x) - u_n(x)| dx.$$

*Indication : utiliser que  $|u(x)| - u_n(x) \leq |u(x) - u_n(x)|$  pour tout  $x \in [0, 1]$ .*

3b) En déduire que pour tout  $r \in [0, 1[$  on a

$$\int_0^r |u(x)| dx = 0.$$

Que peut-on en déduire sur la fonction  $u$  ?

3c) Montrer que la suite de fonctions  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'admet pas de limite dans  $E$  pour la norme  $\|\cdot\|_1$ .

*Indication : on pourra calculer  $\|u_n\|_1$ .*