

Exercice 1:

1) on rappelle que  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  sont denses dans  $\mathbb{R}$ .

-  $A$  n'est pas ouvert: si  $X_0 = (x_0, y_0) \in A$ , pour tout  $\delta > 0$  il existe  $X_\delta = (x_\delta, y_\delta)$  avec  $x_\delta, y_\delta \in \mathbb{Q}$  avec  $d(X_0, X_\delta) < \delta$ . Comme  $x_\delta, y_\delta \in \mathbb{Q}$ ,  $X_\delta \notin A$ .  
Donc  $\forall \delta > 0$   $B(X_0, \delta)$  n'est pas incluse dans  $A$ ,  $A$  n'est pas ouvert.

-  $A$  n'est pas fermé:  $\mathbb{R}^2 \setminus A = \{(x, y) : x \in \mathbb{Q} \text{ et } y \in \mathbb{Q}\}$ .

le même argument que plus haut montre que pour  $X_0 = (0, 0) \in \mathbb{R}^2 \setminus A$ , pour tout  $\delta > 0$  il existe  $x_\delta \notin \mathbb{Q}$  tel que  $X_\delta = (x_\delta, 0) \in B(X_0, \delta)$  mais  $X_\delta \notin \mathbb{R}^2 \setminus A$ . Donc  $\mathbb{R}^2 \setminus A$  n'est pas ouvert,  $A$  n'est pas fermé.

-  $A$  n'est pas borné:  $X_n = (n\sqrt{2}, 0) \in A$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} d((0, 0), X_n) = +\infty$ ,  
donc  $A$  n'est pas borné.

2)  $B$  est fermé:  $f: \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \rightarrow xy \in \mathbb{R}$  est continue car polynomiale,

$B = f^{-1}([-4, 4])$  est fermé car  $[-4, 4]$  est fermé dans  $\mathbb{R}$ .

$B$  n'est pas ouvert: supposons  $B$  ouvert.  $X_0 = (4, 1) \in B$  et  $X_\delta = (4+\delta, 1) \in B(X_0, \delta)$  mais  $X_\delta \notin B$ . Donc  $\forall \delta > 0$   $B(X_0, \delta)$  n'est pas entièrement

entièrement incluse dans  $B$ ,  $B$  n'est donc pas ouvert.

-  $B$  n'est pas borné :  $X_n = (n, \frac{4}{n})$   $n \geq 1$   $X_n \in B$  et  
 $d((0,0), X_n) = (n^2 + \frac{16}{n^2})^{1/2} \rightarrow +\infty$  quand  $n \rightarrow +\infty$

3)  $C$  est fermé :  $C$  est défini par les 2 inégalités  
 $0 \leq x$  et  $x \leq y \Leftrightarrow y - x \geq 0$ .

$$C = f_1^{-1}([0, +\infty[) \cap f_2^{-1}([0, +\infty[) \text{ pour}$$

$$f_1(x, y) = x, \quad f_2(x, y) = y - x, \quad f_1 \text{ et } f_2 \text{ sont continues,}$$

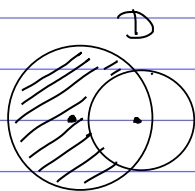
-  $C$  est fermé comme l'intersection des deux fermés  $f_1^{-1}([0, +\infty[)$   
et  $f_2^{-1}([0, +\infty[)$

-  $C$  n'est pas ouvert :  $(0, 0) \in C$  et  $(-d, 0) \in B((0, 0), d) \forall d > 0$   
mais  $(-d, 0) \notin C$ .

-  $C$  n'est pas borné :  $X_n = [0, n) \in C$  mais  $d((0, 0), X_n) = n \rightarrow +\infty$

## Exercice 2

Dessin de  $D$  :



$$1) D = f_1^{-1}([0, 2]) \cap f_2^{-1}([1, +\infty[) \text{ pour}$$

$$f_1(x, y) = x^2 + y^2, \quad f_2(x, y) = (x-1)^2 + y^2. \quad f_1 \text{ et } f_2 \text{ sont}$$

continues,  $D$  est fermé comme intersection de 2 fermés donc

$$\text{Adh}(D) = D.$$

2) Montrons que  $\text{Int}(D) = A = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 2 \text{ et } (x-1)^2 + y^2 > 1\}$

$A = f_1^{-1}(]1, 2[) \cap f_2^{-1}(]1, +\infty[)$  est donc ouvert et  $A \subset D$

donc  $A \subset \text{Int}(D)$  ( $\text{Int}(D)$  est le plus grand ouvert inclus dans  $D$ )

Montrons que  $A = \text{Int}(D)$ . Soit  $X_0 = (x_0, y_0) \in D \setminus A$

on a donc soit  $x_0^2 + y_0^2 = 2$  soit  $(x_0 - 1)^2 + y_0^2 = 1$ .

Dans les 2 cas pour tout  $\delta > 0$  on peut trouver  $X_\delta$  avec  $d(X_0, X_\delta) < \delta$  et  $x_\delta^2 + y_\delta^2 > 2$  ou  $(x_\delta - 1)^2 + y_\delta^2 > 1$ .

Donc  $\forall \delta > 0$ , la boule  $B(X_0, \delta)$  n'est pas entièrement incluse dans  $A$  et donc si  $X_0 \in D \setminus A$ , alors  $X_0 \notin \text{Int}(D)$ .

Ceci montre que  $\text{Int}(D) = A$ .

---

### Exercice 3

1)  $d(a, F) = \inf \{ d(a, x) : x \in F \}$ .

2) (réduction plus détaillée que nécessaire) soit  $A \subset \mathbb{R}$  avec  $\inf A = 0$ . Ceci veut dire que  $A \subset [0, +\infty[$  et il existe

une suite  $x_n \in A$  avec  $\lim x_n = 0$  (voir la définition de  $\inf$ )

Si  $d(a, F) = 0$  il existe donc une suite  $x_n \in A$   $A = \{ d(a, x) : x \in F \}$

avec  $\lim x_n = 0$ , et comme  $x_n \in A$   $x_n = d(a, x_n)$  pour  $x_n \in F$

ce qui fournit la suite  $(x_n)$

3) D'après le 2) si  $d(a, F) = 0$ ,  $\exists (x_n)$  avec  $x_n \in F$  et  $\lim x_n = a$   
donc  $a \in \text{Adh}(F)$  d'après un résultat du cours.

Si  $a \in \text{Adh}(F)$  il existe  $(x_n)$  avec  $x_n \in F$  et  $\lim x_n = a$

alors  $\lim d(a, x_n) = 0$ , donc  $\inf \{ d(a, x) : x \in F \} = 0$  #

---

#### Exercice 4

1) on a vu que si  $(E, d)$  est un espace métrique  $E$  est fermé (car  $\phi$  est ouvert). Ici  $E = ]0, 1[$  donc  $]0, 1[$  est fermé.

Cela peut sembler étrange car  $]0, 1[$  n'est pas fermé comme partie de  $\mathbb{R}$ , mais c'est facile à comprendre:

$]0, 1[$  n'est pas fermé dans  $\mathbb{R}$  par exemple parce que la suite  $x_n = n^{-1}$  qui est dans  $]0, 1[$  converge vers 0 dans  $\mathbb{R}$ , et

$0 \notin ]0, 1[$ . Mais cette même suite  $x_n = n^{-1}$  ne converge pas dans  $]0, 1[$ .

$]0, 1[$  est borné car  $d(x, y) \leq 1, \forall x, y \in ]0, 1[$ .

2)  $]0, 1[$  n'est pas compact:  $x_n = n^{-1}$  est une suite dans  $]0, 1[$ .

supposons qu'une sous suite  $(x_{\varphi(n)})$  converge vers un  $a \in ]0, 1[$

on aurait  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a - \frac{1}{\varphi(n)}| = 0$  mais  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi(n)} = 0$ . (car)

n'a donc pas de sous suite convergente,  $]0, 1[$  n'est pas compact.

---

#### Exercice 4

Soit  $(U_i)_{i \in I}$  un recouvrement ouvert de  $K_1 \cup K_2$ . On a donc

$$K_1 \subset K_1 \cup K_2 \subset \bigcup_{i \in I} U_i$$

$$K_2 \subset K_1 \cup K_2 \subset \bigcup_{i \in I} U_i$$

Comme  $K_1$  et  $K_2$  sont compacts il existe  $I_1, I_2 \subset I$  finis tels

que  $K_1 \subset \bigcup_{i \in I_1} U_i$ ,  $K_2 \subset \bigcup_{i \in I_2} U_i$  et donc

$$K_1 \cup K_2 \subset \bigcup_{i \in I_1 \cup I_2} U_i. \quad I_1 \cup I_2 \text{ est fini. On a}$$

extraît 1/ous recouvrement fini de  $K_1 \cup K_2$ , donc  $K_1 \cup K_2$  est compact.