
Examen de rattrapage MDD251

Durée 2h. Documents et calculatrices interdits.

téléphones éteints et rangés dans les sacs.

ECRIRE SON NOM ET SON GROUPE DE TD

de manière lisible sur chaque copie.

Numéroter chaque copie.

Le 19 Juin 2021.

Exercice 1. Soit $l^1(\mathbb{N})$ l'espace vectoriel des suites réelles $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$ converge. On rappelle que $l^1(\mathbb{N})$ est muni de la norme

$$\|a\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|.$$

1a) Montrer que si $a \in l^1(\mathbb{N})$ la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ est convergente.

1b) Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \quad & l^1(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R} \\ & a \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \end{aligned}$$

est une application linéaire et que $|\varphi(a)| \leq \|a\|_1$ pour tout $a \in l^1(\mathbb{N})$.

2) Soit $F = \{a \in l^1(\mathbb{N}) : \varphi(a) = 1\}$. F est-il ouvert ? fermé ? borné ?

Exercice 2. Soit $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$.

1) Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \varphi_1 : \quad & E \rightarrow \mathbb{R} \\ & f \mapsto f(0) \end{aligned}$$

est une application linéaire continue.

2) Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \varphi_2 : \quad & E \rightarrow \mathbb{R} \\ & f \mapsto \int_0^1 f(x) dx \end{aligned}$$

est une application linéaire continue.

3) Montrer que

$$A = \{f \in E : f(0) = 0, \int_0^1 f(x) dx \geq 1\}$$

est un fermé de E .

4) Soit $f \in E$ tel que $\|f\|_\infty \leq 1$ et $\int_0^1 f(x) dx \geq 1$. Montrer que $\int_0^1 (1 - f(x)) dx = 0$ et en déduire que $f(x) = 1$ pour tout $x \in [0, 1]$.

5) Montrer que si $f \in A$ alors $\|f\|_\infty > 1$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} x^{-1}y^2 & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1) Montrer que f est dérivable au point $(0, 0)$ dans toutes les directions.

2) Montrer que f n'est pas continue en $(0, 0)$.

indication : on pourra trouver deux suites (u_n) et (v_n) de points dans \mathbb{R}^2 telles que $\lim u_n = \lim v_n = (0, 0)$ mais $\lim f(u_n) \neq \lim f(v_n)$.

Exercice 4. Déterminer les extrema locaux des fonctions de deux variables :

$$f(x, y) = (x - y)^2 + (x + y)^3,$$

$$g(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$