
Partiel MDD251

Durée 2h. Documents et calculatrices interdits.
téléphones éteints et rangés dans les sacs.
ECRIRE SON NOM ET SON GROUPE DE TD
de manière lisible sur chaque copie.
Numéroter chaque copie.

Le 10 Mars 2021.

Exercice 1. On munit \mathbb{R}^2 de la distance euclidienne. Déterminer, en justifiant votre réponse, si les ensembles suivants sont ouverts, fermés, bornés :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \notin \mathbb{Q} \text{ ou } y \notin \mathbb{Q}\};$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |xy| \leq 4\};$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y\}.$$

Exercice 2. On munit \mathbb{R}^2 de la distance euclidienne. Déterminer en justifiant votre réponse, l'intérieur et l'adhérence de

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2 \text{ et } (x - 1)^2 + y^2 \geq 1\}.$$

indication : on pourra commencer par dessiner l'ensemble D.

Exercice 3. Soit (E, d) un espace métrique. On rappelle $Adh(F)$ désigne l'adhérence de $F \subset E$.

- 1) Rappeler la définition de la distance $d(a, F)$ entre un point $a \in E$ et un ensemble $F \subset E$.
- 2) Montrer que si $d(a, F) = 0$ alors il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de F telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.
- 2) Montrer que $d(a, F) = 0$ si et seulement si $a \in Adh(F)$.

Exercice 4. Soit $X =]0, 1[$ muni de la distance $d(x, y) = |x - y|$.

- 1) Montrer que X est fermé et borné.
- 2) Montrer que X n'est pas compact.

indication : trouver une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans X sans sous suite convergente dans X .

Exercice 5. Soit (E, d) un espace métrique et K_1, K_2 deux parties compactes de E . Montrer que $K_1 \cup K_2$ est compact.

indication : utiliser la définition de la compacité à l'aide de recouvrements ouverts.