

Exercice 1

1) facile pour N_1 . Pour N_2 le seul point délicat est le fait que

$N_2(u) = 0$ implique que $u = 0$. Si $N_2(u) = 0$ alors $u(n+1) = u(n) \forall n$ donc $u(n) = 0 \forall n$ comme $u(0) = 0$.

2) on a : $|u(n+1) - u(n)| \leq |u(n+1)| + |u(n)|$ donc

$$N_2(u) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u(n+1) - u(n)| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |u(n+1)| + \sup_{n \in \mathbb{N}} |u(n)| \leq 2N_1(u).$$

si $u(n) = (-1)^n$, $N_1(u) = 1$ et $|u(n+1) - u(n)| = 2$ donc $N_2(u) = 2$.

3a) on a : $\sup_{n \in \mathbb{N}} |u_p(n)| = 1$ car $u_p(n) = 1$ pour $n > p$, $|u_p(n)| \leq 1$ pour $n \leq p$.

$$u_p(n+1) - u_p(n) = \begin{cases} \frac{n+1}{p} - \frac{n}{p} = \frac{1}{p} & \text{si } n+1 \leq p \\ 1 - \frac{n}{p} = \frac{1}{p} & \text{si } n+1 = p \\ 0 & \text{si } n+1 > p. \end{cases}$$

$$\text{Donc } N_2(u_p) = \frac{1}{p}.$$

3b) on a : $\lim_{p \rightarrow \infty} N_2(u_p) = 0$ et $N_1(u_p) = 1$. Si N_1 et N_2 étaient

équivalentes, on aurait $N_1(u_p) \leq C N_2(u_p)$ pour un $C > 0$, ce qui est une contradiction.

Exercice 2

$$1) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6x - 6y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -6y^2 - 6x$$

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & -12y \end{pmatrix}.$$

$$2) \text{ On résout } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ y^2 + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x^2 + x = 0 \end{cases}$$

on obtient $(x, y) = (0, 0)$ ou $(x, y) = (-1, -1)$

$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$ la trace vaut 6, le déterminant -36,
 $(0,0)$ est un point selle.

$H_f(-1,-1) = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}$ la trace vaut 18, le déterminant 36,
 $(-1,-1)$ est un minimum local.

3) $f(n,0) = 3n^2$ $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n,0) = +\infty$, donc f n'est pas majorée sur \mathbb{R}^2 .

$f(0,n) = -2n^3$ $\lim_{n \rightarrow \infty} f(0,n) = -\infty$, donc f n'est pas minorée sur \mathbb{R}^2 .

Exercice 3

1) si $N_1(f) = 0$ on a $f'(x) = 0 \forall x \in [0,1]$ et $f(0) = 0$ donc $f(x) = 0 \forall x \in [0,1]$.

De même si $N_2(f) = 0$ on a $f(x) + f'(x) = 0 \forall x \in [0,1]$ donc $f(x)e^x = \text{cste}$
sur $[0,1]$ donc $f(x)e^x = 0$ sur $[0,1]$ comme $f(0) = 0$.

Le fait que N_1, N_2 sont des normes sur E est alors facile.

2) on a $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt = \int_0^x f'(t) dt$ donc

$$|f(x)| \leq \int_0^x |f'(t)| dt \leq \int_0^1 |f'(t)| dt \leq N_1(f) \text{ car } |f'(t)| \leq N_1(f) \forall t \in [0,1].$$

On a donc $|f(x) + f'(x)| \leq |f(x)| + |f'(x)| \leq 2N_1(f) \forall x \in [0,1]$,

donc $N_2(f) \leq 2N_1(f)$.

3).

on a $(e^x f(x))' = e^x(f'(x) + f(x))$ donc les 2 membres ont la même dérivée. Comme $f(0) = 0$, elles prennent la même valeur en 0, donc sont égales.

4). On déduit de 3) que

$$|e^x f(x)| \leq \int_0^x |f(t) + f'(t)| e^t dt \leq e^x \int_0^x |f(t) + f'(t)| dt$$

d'où on conclut.

$$\text{Comme } \int_0^x |f(t) + f'(t)| dt \leq \int_0^1 |f(t) + f'(t)| dt = N_2(f)$$

$$\text{on a } |f(x)| \leq N_2(f) \quad \forall x \in [0, 1]$$

$$\text{et } |f'(x)| \leq |f(x) + f'(x)| + |f(x)| \leq 2N_2(f) \quad \forall x \in [0, 1]$$

$$\text{donc } N_1(f) \leq 2N_2(f)$$

Exercice 4

$$1) \text{ on a } A_n B_n - AB = (A_n - A)B + A_n(B_n - B),$$

$$\text{Donc } \|A_n B_n - AB\| \leq \|(A_n - A)B\| + \|A_n(B_n - B)\|$$

$$\leq \|B\| \|A_n - A\| + \|A_n\| \|B_n - B\|.$$

Comme $A_n \rightarrow A$, $\|A_n\| \rightarrow \|A\|$, $\|A_n - A\| \rightarrow 0$, comme $B_n \rightarrow B$

$\|B_n - B\| \rightarrow 0$. On a donc $\|A_n B_n - AB\| \rightarrow 0$ donc $A_n B_n \rightarrow AB$.

$$2) \text{ si } \lim_{n \rightarrow \infty} A^n = C \quad \text{on a } \lim_{n \rightarrow \infty} A^n \times A^n = C^2.$$

$$\text{mais } A^n \times A^n = A^{2n} \text{ donc } \lim_{n \rightarrow \infty} A^{2n} = C \text{ et } C^2 = C.$$