
Examen MDD251

Durée 2h. Documents et calculatrices interdits.
téléphones éteints et rangés dans les sacs.
ECRIRE SON NOM ET SON GROUPE DE TD
de manière lisible sur chaque copie.
Numéroter chaque copie.

Le 19 Mai 2021.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = 2x^3 + 3y^2 + 6xy.$$

- 1) Calculer les dérivées partielles de f et sa matrice hessienne.
- 2) Déterminer les points critiques de f ainsi que leur nature.

Question bonus :

f est elle minorée, resp. majorée sur \mathbb{R}^2 ? justifiez votre réponse.

Exercice 2. Soit $C_b(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues bornées à valeurs réelles sur \mathbb{R} .

- 1) Soit $E \subset \mathbb{R}$. Montrer que si E n'est pas dense dans \mathbb{R} alors son complémentaire $\mathbb{R} \setminus E$ contient un intervalle ouvert $]a, b[$.
- 2) Soit $f \in C_b(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. Montrer que si $f^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$ est dense dans \mathbb{R} alors $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- 3) On fixe une fonction $\varphi \in C_b(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ et on pose

$$N(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)f(x)|.$$

- 4) Montrer que

$$N(f + g) \leq N(f) + N(g), \quad N(\lambda f) = |\lambda|N(f), \quad \forall f, g \in C_b(\mathbb{R}; \mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R},$$

c'est à dire que N est une semi norme sur $C_b(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

- 5) On suppose que $\varphi^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) \neq 0\}$ est dense dans \mathbb{R} . Montrer que si $f \in C_b(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ et $\varphi(x)f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Indication : montrer que f s'annule sur $\varphi^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ et utiliser la question 2).

En déduire que dans ce cas N est une norme sur $C_b(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

- 6) On suppose que $\varphi^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) \neq 0\}$ n'est pas dense dans \mathbb{R} . En utilisant la question 1) trouver une fonction $f \in C_b(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, non identiquement nulle, telle que $\varphi(x)f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

En déduire que dans ce cas N n'est pas une norme sur $C_b(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

Exercice 3. On munit \mathbb{R}^n de sa norme canonique $\|x\| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{1}{2}}$ et l'espace vectoriel

$M_n(\mathbb{R})$ des matrices $n \times n$ réelles de la norme associée :

$$\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq 1} \|Ax\|.$$

On note $\mathbb{1}$ la matrice identité dans $M_n(\mathbb{R})$. On rappelle que $(M_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$ est *complet* et que

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\| \quad A, B \in M_n(\mathbb{R}).$$

1) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que $\|A\| < 1$. Montrer que la série

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} A^n$$

est normalement convergente. Pour quelle raison est-elle convergente dans $(M_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$?

2) On pose $S_N = \sum_{n=0}^N A^n$. Calculer $(\mathbb{1} - A)S_N$ puis la limite

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} (\mathbb{1} - A)S_N$$

dans $(M_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$. En déduire que si $\|A\| < 1$ la matrice $(\mathbb{1} - A)$ est inversible.

3) Soit $B_0 \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible et B_0^{-1} son inverse. Montrer que si $\|B_0^{-1}\|\|B\| < 1$ la matrice $B_0 - B$ est aussi inversible.

Indication : utiliser l'identité $B_0 - B = B_0(\mathbb{1} - B_0^{-1}B)$.

4) En déduire que l'ensemble

$$GL_n(\mathbb{R}) = \{B \in M_n(\mathbb{R}) : B \text{ inversible}\}$$

est ouvert dans $M_n(\mathbb{R})$.

5) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| < \epsilon$ tel que $A - \lambda\mathbb{1}$ est inversible.

Indication : utiliser le polynôme caractéristique de A .

En déduire que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$.