
Partiel MDD251

Durée 2h. Documents et calculatrices interdits.
téléphones éteints et rangés dans les sacs.
ECRIRE SON NOM ET SON GROUPE DE TD
de manière lisible sur chaque copie.
Numéroter chaque copie.

Le 21 Avril 2021.

6 Exercice 1. On munit \mathbb{R}^2 de la distance euclidienne. Déterminer, en justifiant votre réponse, si les ensembles suivants sont ouverts, fermés, bornés :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q} \text{ ou } y \in \mathbb{Q}\}; \quad 2$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |xy| > 4\}; \quad 2$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < x\}. \quad 2$$

4 Exercice 2. On munit \mathbb{R}^2 de la distance euclidienne. Déterminer en justifiant votre réponse, l'intérieur et l'adhérence de

2 2

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq |x|, |y| < 1\}.$$

indication : on pourra commencer par dessiner l'ensemble A.

6 Exercice 3. Soient (E_1, d_1) et (E_2, d_2) deux espaces métriques et $f : E_1 \rightarrow E_2$ une application continue.

2 1) Rappeler les deux définitions équivalentes de la propriété " (E_1, d_1) est compact".

1 2) On suppose que (E_1, d_1) est compact et on fixe un ensemble $F \subset E_1$ fermé. Montrer que F est compact dans E_1 .

1 3) Soit $f(F)$ l'image de F par f et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $y_n = f(x_n)$, $x_n \in F$ une suite dans $f(F)$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \in E_2$.

Montrer qu'il existe $x \in F$ tel que $y = f(x)$.

Indication : utiliser la compacité de F .

1 4) En déduire que $f(F)$ est fermé dans E_2 .

1 5) En déduire que si $f : E_1 \rightarrow E_2$ est une bijection, alors $f^{-1} : E_2 \rightarrow E_1$ est continue.

4 Exercice 4. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un \mathbb{R} -espace vectoriel normé. On fixe $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que les applications

$$2 \quad E \ni x \mapsto u + x \in E,$$

$$2 \quad E \ni x \mapsto \lambda x \in E$$

sont continues.