
Partiel MDD251

Durée 2h. Documents interdits et calculatrices inutiles.

téléphones éteints et rangés dans les sacs.

IL EST INTERDIT D' ECRIRE AU CRAYON OU A L' ENCRE ROUGE

ECRIRE SON NOM ET SON GROUPE DE TD

de manière lisible sur chaque copie.

Numéroter chaque copie.

Le 6 Mars 2024.

Exercice 1. Soit (E, d) un espace métrique. On munit $E \times E$ de la distance

$$D((x, y), (x', y')) = d(x, x') + d(y, y'), \text{ pour } (x, y), (x', y') \in E \times E.$$

Soit $f : E \rightarrow E$ une application continue. Montrer que le graphe de f , $\Gamma_f = \{(x, y) \in E \times E : y = f(x)\}$ est un fermé de $E \times E$.

Exercice 2. On considère l' espace $E = C([0, 1]; \mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs réelles. On munit E de la distance :

$$d(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|, \text{ pour } f, g \text{ fonctions continues sur } [0, 1].$$

Soit $U \subset E$ le sous ensemble

$$U = \{f \in C([0, 1]; \mathbb{R}) : f(x) > 0 \forall x \in [0, 1].\}$$

1) Soit f une fonction qui appartient à U . Que peut-on dire du réel

$$\alpha = \inf_{x \in [0, 1]} f(x) ?$$

(Justifier votre réponse).

2) Montrer que si $f \in U$ alors il existe $\epsilon > 0$ tel que pour toute fonction $g \in C([0, 1]; \mathbb{R})$ telle que $\sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)| < \epsilon$, on a $g(x) > 0$ pour tout $x \in [0, 1]$.

3) Que peut-on en déduire sur l' ensemble U ?

Exercice 3. Déterminer l' intérieur et l' adhérence des ensembles suivants (on muni \mathbb{R}^d de la distance usuelle)

$$1) \quad U = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\} \text{ dans } \mathbb{R},$$

$$2) \quad U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, x \neq 0\}.$$

Justifier soigneusement vos réponses.

Exercice 4. On rappelle que la fonction $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est une bijection continue strictement croissante.

1) Montrer que $\delta : (x, y) \mapsto |\arctan x - \arctan y|$ est une distance sur \mathbb{R} .

2) On note par $d(x, y) = |x - y|$ la distance usuelle sur \mathbb{R} . Montrer que si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle et $x \in \mathbb{R}$, alors (x_n) converge vers x pour la distance d si et seulement si (x_n) converge vers x pour la distance δ .

3) Montrer que \mathbb{R} est fermé et borné pour la distance δ .

4) Montrer que \mathbb{R} n' est pas compact pour la distance δ .

Indication : construire une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans \mathbb{R} qui n' a pas de sous suite convergente pour δ .