
Examen de rattrapage MDD251

Durée 2h. Documents et calculatrices interdits.

téléphones éteints et rangés dans les sacs.

IL EST INTERDIT D' ECRIRE AU CRAYON OU A L' ENCRE ROUGE

ECRIRE SON NOM ET SON GROUPE DE TD

de manière lisible sur chaque copie.

Numéroter chaque copie.

Le 2 Juillet 2024.

Exercice 1. On munit \mathbb{R}^d pour $d = 1, 2, 3$ de leurs distances usuelles. On rappelle que si $A \subset \mathbb{R}^2$ et $B \subset \mathbb{R}$ alors $A \times B \subset \mathbb{R}^3$ est l' ensemble

$$A \times B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A, z \in B\}.$$

Montrer que si A est ouvert dans \mathbb{R}^2 et B ouvert dans \mathbb{R} alors $A \times B$ est ouvert dans \mathbb{R}^3 .

Exercice 2. On se place dans \mathbb{R}^2 muni de la distance usuelle. Déterminer en justifiant votre réponse l' adhérence et l' intérieur des ensembles suivants :

- 1) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1, x > 0, y \geq 0\},$
- 2) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = e^x, -1 < x < 1\}.$

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = 2x^4 + y^4 - (x + y)^2.$$

- 1) Calculer les dérivées partielles de f et sa matrice hessienne.
- 2) Déterminer les points critiques de f ainsi que leur nature.

Question bonus :

f est elle minorée, resp. majorée sur \mathbb{R}^2 ? justifiez votre réponse.

Exercice 4. On se place dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans E telle qu' il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\|u_n - u_p\| \geq c, \forall n \neq p \in \mathbb{N}.$$

- 1) Montrer qu' alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne possède pas de sous-suite convergente.
- 2) On considère l' espace vectoriel normé $E = C([0, 2\pi]; \mathbb{C})$ des fonctions continues sur $[0, 2\pi]$ à valeurs dans \mathbb{C} , muni de la norme

$$\|u\|_\infty = \sup_{x \in [0, 2\pi]} |u(x)|.$$

2a) Montrer que

$$\int_0^{2\pi} |u(x)|^2 dx \leq 2\pi \|u\|_\infty^2, \forall u \in E.$$

On considère dans E la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n(x) = e^{inx}$.

2a) Montrer que $|u_n(x) - u_p(x)|^2 = 2(1 - \cos((n - p)x))$.

2b) Calculer $\int_0^{2\pi} |u_n(x) - u_p(x)|^2 dx$.

2c) En déduire que $\|u_n - u_p\|_\infty \geq \sqrt{2}$ pour tout $n \neq p$.

Indication : supposer que $\|u_n - u_p\|_\infty < \sqrt{2}$ et en déduire une contradiction.

2d) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à la boule unité fermée $B_{f,E}(0, 1) = \{u \in E : \|u\|_\infty \leq 1\}$ dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

2e) La boule unité $B_{f,E}(0, 1)$ est-elle compacte ?