

---

## EXAMEN MDD251

Durée 2h. Documents et calculatrices interdits.

téléphones éteints et rangés dans les sacs.

IL EST INTERDIT D' ECRIRE AU CRAYON OU A L' ENCRE ROUGE

ECRIRE SON NOM ET SON GROUPE DE TD

de manière lisible sur chaque copie.

Numéroter chaque copie.

---

Le 15 Mai 2024.

**Exercice 1.** [4 pts] Soit  $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues sur  $\mathbb{R}^2$ . On définit la fonction  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$h(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } x - y \geq 0, \\ g(x, y) & \text{si } x - y < 0. \end{cases}$$

1) Montrer que si  $f(x_0, x_0) \neq g(x_0, x_0)$  pour un  $x_0 \in \mathbb{R}$  alors  $h$  n'est pas continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

*Indication :* considérer deux suites bien choisies  $X_n = (x_n, y_n)$  et  $\tilde{X}_n = (\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)$  avec  $x_n > y_n$  et  $\tilde{x}_n < \tilde{y}_n$  et comparer  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(X_n)$  avec  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(\tilde{X}_n)$ .

2) on suppose que  $f(x, x) = g(x, x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Montrer en revenant à la définition de la continuité avec des  $\epsilon, \delta$  que la fonction  $h$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Exercice 2.** [4 pts] Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction

$$f(x, y) = \begin{cases} y^2 x^{-1} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1) Montrer que  $f$  admet des dérivées dans toutes les directions en  $(0, 0)$ .

2) Montrer que  $f$  n'est pas continue en  $(0, 0)$ .

**Exercice 3.** [4 pts] On considère l'espace vectoriel normé  $E = C([-1, 1])$  des fonctions continues sur  $[-1, 1]$  à valeurs réelles, muni de la norme  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [-1, 1]} |f(x)|$ .

1) On fixe  $x_0 \in [-1, 1]$ . Montrer que l'application

$$\varphi_{x_0} : \begin{array}{l} C([-1, 1]) \rightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto f(x_0) \end{array}$$

est une application linéaire continue.

2) En déduire que pour tout  $x_0 \in [-1, 1]$

$$U_{x_0} = \{f \in C([-1, 1]) : |f(x_0)| < 1\}$$

est un ouvert de  $C([-1, 1])$ .

**Exercice 4.** [8 pts] On considère l'espace vectoriel normé  $E = B([0, +\infty[)$  des fonctions  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  bornées muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, +\infty[} |f(x)|.$$

On note par  $F \subset B([0, +\infty[)$  l'ensemble des fonctions bornées ayant une limite *finie* en  $+\infty$ .

1) Soit  $f, g \in F$ . Montrer que

$$\left| \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right| \leq \|f - g\|_\infty.$$

2) Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions avec  $f_n \in F$ , et soit  $l_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$  la limite de  $f_n$  en  $+\infty$ . On suppose que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers une fonction  $f \in E$ , c'est à dire que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$ .

2a) Montrer en utilisant 1) que la suite réelle  $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy dans  $\mathbb{R}$ . On pose  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} l_n$ .

2b) Vérifier que pour tout  $x \in [0, +\infty[$  et  $n \in \mathbb{N}$  on a

$$|f(x) - l| \leq |l - l_n| + \|f_n - f\|_\infty + |l_n - f_n(x)|.$$

*Indication : utiliser que  $|f(x) - l| \leq |l - l_n| + |f(x) - f_n(x)| + |l_n - f_n(x)|$ .*

2c) On fixe  $\epsilon > 0$ . En déduire qu' on peut trouver  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $|l - l_n| + \|f_n - f\|_\infty \leq 2\epsilon$ .

2d) Démontrer qu' il existe  $R > 0$  tel que  $|f(x) - l| \leq 3\epsilon$  pour  $x \geq R$ .

3) Que peut-on en déduire sur l' ensemble  $F$  ?