

Exercice 1

1) si $\lim u_n = u$ pour $\|\cdot\|_\infty$ on a $\|u_n - u\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |u_n(x) - u(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Comme $|u_n(x) - u(x)| \leq \|u_n - u\|_\infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a donc $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n(x) - u(x)| = 0$.

2a) supposons que $\|u_n - u\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Par 1) pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ on a

$u_n(x_1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u(x_1)$ et $u_n(x_2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u(x_2)$. Si $x_1 \leq x_2$ on a donc

$u(x_2) - u(x_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x_2) - u_n(x_1)$. Comme u_n est croissante pour tout $n \in \mathbb{N}$

on a $u_n(x_2) - u_n(x_1) \geq 0$ donc en passant à la limite $u(x_2) - u(x_1) \geq 0$.

Ceci étant vrai pour tous $x_1 \leq x_2$, u est croissante.

2b) On déduit de 2a) que f est fermé pour $\|\cdot\|_\infty$.

3a). si $u \notin A$ u est croissante et bornée donc u admet des limites finies en $\pm\infty$.

Donc ACC.

3b) on a $|u^\pm - v^\pm| = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} |u(x) - v(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x) - v(x)| = \|u - v\|_\infty$.

3c) Supposons que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$. la suite (u_n) converge dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ donc est de Cauchy dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N_ε tel que

si $n, p \geq N_\varepsilon$ alors $\|u_n - u_p\| \leq \varepsilon$. Par 3b) on a aussi $|u_n^\pm - u_p^\pm| \leq \varepsilon$,
donc les suites $(u_n^\pm)_{n \in \mathbb{N}}$ sont de Cauchy dans \mathbb{R} , donc convergentes.

3d) Soit $\varepsilon > 0$.

Il existe N_1 tel que si $n \geq N_1$ alors $\|u - u_n\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x) - u_n(x)| \leq \varepsilon$.

Il existe N_2 — $n \geq N_2$ alors $|u^\pm - u_n^\pm| \leq \varepsilon$.

Prends $n = \max(N_1, N_2)$. On a donc :

$$|u(x) - u^\pm| = |u(x) - u_n(x) + u_n(x) - u_n^\pm + u_n^\pm - u^\pm|$$

$$\leq |u_n(x) - u(x)| + |u_n^\pm - u^\pm| + |u_n(x) - u_n^\pm| \leq 2\varepsilon + |u_n(x) - u_n^\pm|.$$

n étant fixé on voit que $u_n^\pm = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u_n(x)$. Il existe donc R^\pm tels que

si $x > R^+$ (resp. $x < R^-$) alors $|u_n(x) - u_n^\pm| \leq \varepsilon$.

On en déduit que si $x > \mathbb{R}^+$ (resp. $x < \mathbb{R}^-$) alors

$$|u(x) - u^\pm| \leq 3\varepsilon. \text{ Remplaçant } \varepsilon \text{ par } \varepsilon/3 \text{ on a bien montré que}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x) = u^\pm. \text{ En particulier } u = \lim u_n \text{ appartient à } C \text{ si}$$

$u_n \in C \forall n \in \mathbb{N}$, donc C est fermé.

Exercice 2.

1) on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 4y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 - 4x$. Les points critiques de f sont donnés

$$\text{par: } \begin{cases} 4x^3 - 4y = 0 \\ 4y^3 - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = y \\ y^3 = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = x \\ x^3 = y. \end{cases}$$

on obtient donc $x=0$, ou $x^3=1$ donc $x=0, 1, -1$. Les points critiques sont $(0,0), (1,1), (-1,-1)$.

$$\text{On a } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2, \text{ Hess } f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}.$$

$$A = \text{Hess } f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \det A = -16, \text{tr } A = 0, (0,0) \text{ est un point selle.}$$

$$A = \text{Hess } f(1,1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix} \det A = 128, \text{tr } A = 24, (1,1) \text{ est un minimum local.}$$

$$\text{Hess } f(-1,-1) = \text{Hess } f(1,1), \text{ donc } (-1,-1) \text{ est un minimum local.}$$

$$2) \text{ On a: } (x^2-1)^2 + (y^2-1)^2 + 2(x-y)^2 = x^4 - 2x^2 + 1 + y^4 - 2y^2 + 1 + 2(x^2 + y^2 - 2xy) = f(x,y) + 2.$$

$$3) \text{ On a } (x^2-1)^2 + (y^2-1)^2 + 2(x-y)^2 \geq 0 \quad \forall (x,y), \text{ cette fct s'annule en } (x,y) = (1,1) \text{ et } (-1,-1). \text{ On en déduit que } f \text{ a } (1,1), (-1,-1) \text{ comme minimum global sur } \mathbb{R}^2, \text{ avec } f(\pm 1, \pm 1) = -2.$$

Exercice 3.

1) le fait que φ_{20} est linéaire et immédiat. on a $|\varphi_{20}(f)| = |f(20)| \leq$

$$\sup_{x \in [-1,1]} |f(x)| = \|f\|_\infty. \varphi_{20} \text{ est une donc une application linéaire}$$

continue.

2) $U_{20} = \varphi_{20}^{-1}]-1,1[$ est un ouvert de E , comme image réciproque de $] -1,1[$ par l'application continue φ_{20} .

3a) et 3b) soit $f \in \mathcal{U}$. f étant continue sur $[-1,1]$, f est bornée et atteint ses bornes sur $[-1,1]$. Comme $|f(x)| < 1 \forall x \in [-1,1]$

on a $\sup_{x \in [-1,1]} |f(x)| = \|f\|_{\infty} < 1$. Réciproquement si $\|f\|_{\infty} < 1$, alors $f \in \mathcal{U}$.

On a donc $\mathcal{U} = \{f \in E : \|f\|_{\infty} < 1\}$. \mathcal{U} est l'image inverse par l'application continue $E \rightarrow \mathbb{R}$ de l'ouvert $] -1, 1[$, donc \mathcal{U} est ouvert.
 $f \mapsto \|f\|_{\infty}$