
Examen MDD251

Durée 2h. Documents et calculatrices interdits.
téléphones éteints et rangés dans les sacs.
ECRIRE SON NOM ET SON GROUPE DE TD
de manière lisible sur chaque copie.
Numéroter chaque copie.

Le 18 Mai 2022.

Exercice 1. Soit $B(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bornées, muni de la norme $\|u\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x)|$.

1) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $B(\mathbb{R})$. Montrer que si $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = u(x)$.

2) Soit $A \subset B(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions bornées croissantes.

2a) Montrer que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de A qui converge vers la fonction u pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ alors u est une fonction croissante.

2b) Que peut on en déduire pour l'ensemble A ?

3) Soit $C \subset B(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions bornées ayant une limite finie en $+\infty$ et en $-\infty$.

3a) Quelle relation d'inclusion existe-t-il entre A et C ? (justifier votre réponse).

3b) Montrer que si $u, v \in C$ et si $u^\pm = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x)$ et $v^\pm = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} v(x)$ alors

$$|u^\pm - v^\pm| \leq \|u - v\|_\infty.$$

3c) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de C qui converge vers une fonction $u \in B(\mathbb{R})$. On pose $u_n^\pm = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u_n(x)$.

Montrer que les suites réelles $(u_n^\pm)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes dans \mathbb{R} .

Indication : utiliser 3b) pour montrer que ce sont des suites de Cauchy.

3d) On note par $u^\pm \in \mathbb{R}$ les limites $u^\pm = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n^\pm$. Montrer, en le justifiant soigneusement, que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x) = u^\pm$ et en déduire que C est un fermé de $B(\mathbb{R})$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

1) Calculer les points critiques de f et déterminer leur nature.

2) Montrer que

$$x^4 + y^4 - 4xy + 2 = (x^2 - 1)^2 + (y^2 - 1)^2 + 2(x - y)^2.$$

3) La fonction f admet-elle un minimum global sur \mathbb{R}^2 ?

Exercice 3. On considère l'espace vectoriel normé $E = C([-1, 1])$ des fonctions continues sur $[-1, 1]$ à valeurs réelles, muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [-1, 1]} |f(x)|$.

1) On fixe $x_0 \in [-1, 1]$. Montrer que l'application

$$\varphi_{x_0} : \begin{array}{l} C([-1, 1]) \rightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto f(x_0) \end{array}$$

est une application linéaire continue.

2) En déduire que pour tout $x_0 \in [-1, 1]$

$$U_{x_0} = \{f \in C([-1, 1]) : |f(x_0)| < 1\}$$

est un ouvert de $C([-1, 1])$.

3) Soit

$$U = \{f \in C([-1, 1]) : |f(x)| < 1 \ \forall x \in [-1, 1]\}.$$

3a) Montrer que si $f \in U$ alors il existe $0 < c < 1$ tel que $|f(x)| \leq c$ pour tout $x \in [-1, 1]$.

3b) En utilisant 3a) montrer que $U = \{f \in C([-1, 1]) : \|f\|_\infty < 1\}$. En déduire en justifiant votre réponse que U est un ouvert de $C([-1, 1])$.