
Examen de rattrapage MDD251

Durée 2h. Documents et calculatrices interdits.

téléphones éteints et rangés dans les sacs.

Numéroter chaque copie.

Le 22 Juin 2022.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} x^{-1}y^2 & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1) Montrer que f est dérivable au point $(0, 0)$ dans toutes les directions.

Indication : revenir à la définition en considérant la fonction $t \mapsto f(t\vec{v})$ pour un vecteur $\vec{v} \neq \vec{0}$ arbitraire.

2) Montrer que f n'est pas continue en $(0, 0)$.

indication : on pourra trouver deux suites (u_n) et (v_n) de points dans \mathbb{R}^2 telles que $\lim u_n = \lim v_n = (0, 0)$ mais $\lim f(u_n) \neq \lim f(v_n)$.

Exercice 2. Déterminer les extrema locaux de la fonction de deux variables :

$$g(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

Exercice 3. Soit (E, d) un espace métrique. On rappelle que pour $A \subset E$ et $x \in E$ la distance de x à A notée $d(x, A)$ est égale à

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y).$$

1) Soit $A \subset E$ et $x, x' \in E$. Montrer que pour tout $y \in A$ on a

$$d(x, A) \leq d(x, x') + d(x', y).$$

Indication : utiliser l'inégalité triangulaire $d(x, y) \leq d(x, x') + d(x', y)$.

2a) En déduire que $d(x, A) \leq d(x, x') + d(x', A)$ puis que $|d(x, A) - d(x', A)| \leq d(x, x')$.

2b) Que peut on en déduire sur l'application $E \ni x \mapsto d(x, A) \in \mathbb{R}$?

3a) Soit $U \subset E$ un ouvert. Montrer que pour tout $x \in U$ on a $d(x, E \setminus U) > 0$.

3b) Soit K un ensemble compact inclus dans U . Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$d(x, E \setminus U) \geq \alpha, \quad \forall x \in K.$$

Indication : considérer la fonction $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = d(x, E \setminus U)$ et utiliser une propriété vue en cours.

3c) En déduire qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in K$ la boule ouverte $B(x, \delta)$ est entièrement incluse dans U .

Exercice 4. On considère l'espace vectoriel normé $C([-1, 1])$ des fonctions continues à valeurs

réelles muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{[-1,1]} |f(x)|$.

1) Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 1$ on définit la fonction $f_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} 1+x & \text{pour } -1 \leq x < -\frac{1}{n} \\ 1 - \frac{1}{2n} - \frac{n}{2}x^2 & \text{pour } -\frac{1}{n} < x \leq \frac{1}{n} \\ 1-x & \text{pour } \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

1a) Montrer que f_n est de classe C^1 sur $[-1, 1]$.

1b) Déterminer la fonction $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x).$$

Indication : commencer par dessiner les graphes de quelques fonctions f_n .

1c) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f dans $C([-1, 1])$.

1d) L'ensemble $C^1([-1, 1])$ est-il fermé dans $C([-1, 1])$?